

ASSOCIATION INTERNATIONALE DE GÉODÉSIE

BUREAU GRAVIMÉTRIQUE
INTERNATIONAL

N° 21

Bulletin d'Information

Novembre 1969

9, QUAI ST-BERNARD - Tour 14
PARIS V°

BUREAU GRAVIMÉTRIQUE
INTERNATIONAL

Paris

=====

BULLETIN D'INFORMATION

Novembre 1969

N°21

T A B L E des M A T I E R E S

- I -

- International Gravity Commission I - 3.
- Estimation des anomalies inconnues à l'aide d'un modèle stochastique (M. ALBUISSON) I - 5.
- Quelques fonctions aléatoires utilisées en Gravimétrie et leurs propriétés (J.M. MONGET) I - 23.

- II -

- Liste des publications reçues au B.G.I.
(Juin 1969 - Oct. 1969) concernant les questions de pesanteur II - 1.

Note : Le B.G.I. remercie ceux qui ont bien voulu répondre à la circulaire relative aux mesures de pesanteur en mer.

Ces informations (et toute information complémentaire reçue avant le 20 Février 1970) seront groupées dans le Bulletin d'Information n°22, Mars 1970.

INTERNATIONAL GRAVITY COMMISSION

The sixth meeting of the International Gravity Commission will be held in Paris in 1970,

from Monday 7th September until Saturday 12th September 1970

The last meeting was held in 1965.

This interval of 5 years is much longer than the usual interval of 3 years which separated previous meetings. It is due to the delay of one year of the 14th General Meeting of the International Association of Geodesy held in Luzern in 1967, and to the interval of 4 years instead of 3 between two general meetings of the I.A.G.

So the next meeting of the I.G.C. will be of great interest to Geodesists.

It is the tradition that the meetings of the I.G.C. take place in the previous year of the meeting of the I.A.G. (The 15th General Meeting will be held in Moscow in 1971). Thus, the decisions which will be proposed at the I.G.C. meeting can be presented at the meeting of the I.A.G. - for the I.G.C. has no authority of self-decision.

We must also take into account decisions adopted at the General Meeting of Luzern and consider recent problems created by the evolution which occurred these last years in certain general ideas in connection with geodesy.

The International Gravity Commission is composed, in principle, of one delegate from each member-nation of the I.U.G.G. It can be called upon to take decisions on certain technical questions, or, for the more important questions, to offer an opinion to be submitted to the General Assembly of the I.A.G., the following year.

It is the tradition, however, and it appears to be well worthwhile, that at the same time as the meeting of the I.G.C., a wider Symposium on gravity should be held, on a wider range of subjects and adapted to questions of present interest. The activities undertaken should also be a preparation for the meeting of Section IV "Gravity" during the next Assembly of the I.A.G. Moreover, they should be limited to questions of actual measurement of gravity (absolute and relative gravity measurements, gravity reductions and anomalies) without touching on its purely theoretical aspects (except briefly for informative purposes). This is the principal point which distinguishes the attributions of Section IV and V of the I.A.G.

The principal questions dealt with during this meeting will be the following :

- Report of the International Gravity Bureau, present situation, projects under preparation, future of the I.G.B.
- Absolute gravity measurements, connections between absolute stations.
- Modification on gravity anomalies due to recent changes of the reference ellipsoid and equatorial value of "g".
- First order network, standardization problem.
- Gravity measurements at sea.
- Airborne gravity measurements.
- Secular variation of gravity.
- Vertical gradient of gravity.
- Various instrumental questions.
- International Cooperation in Gravimetry.
- Interpolated gravity values for unsurveyed areas, discussions on different methods.

This is a general programme of the questions proposed. A detailed agenda will be indicated in the previous months of the meeting as well as a time-schedule.

I would ask you to be kind enough to let us know of any question that you would like to see included in the agenda.

Though it is a supplementary task for every Nation, the presentation of a National Report is required for informing all Geodesists and the I.G.B. of the progress of geodetic works. This report can be presented under a simple format (roneotyped) and about 100 copies would be necessary to be distributed to Delegates present at the meeting.

Prof. P. TARDI
Director of the International
Gravity Bureau

ESTIMATION DES ANOMALIES INCONNUES A L'AIDE D'UN MODELE STOCHASTIQUE

Introduction

Dans l'article qui suit nous nous attacherons à construire un modèle mathématique susceptible de s'adapter aux variations de l'anomalie de la gravité à la surface du globe. (Ex. : anomalie à l'air libre Δg).

Nous ne prenons ici que les concepts purement mathématiques définis par Mr. MATHERON (1), (cf. bibliographie), l'exploitation de ces résultats étant actuellement en cours au Bureau Gravimétrique International.

La plupart du temps, nous ne donnerons pas de démonstration complète des résultats énoncés, mais seulement une ébauche. Dans ce cas, référence sera faite aux divers articles de Mr. Matheron.

- I -

Rappel sur les fonctions aléatoires

On appelle fonction aléatoire une variable aléatoire (discrète ou continue) dépendant d'un paramètre x , élément de l'ensemble \mathbb{R}^n . Le cas le plus fréquent rencontré en calcul des probabilités est celui où x est le temps ($x \in \mathbb{R}$), il est de coutume d'appeler ces fonctions aléatoires : processus aléatoires. Pour notre part, le paramètre étant souvent pris dans l'espace \mathbb{R}^2 , nous conserverons la terminologie de fonction aléatoire.

Autre définition : nous dirons que $\Delta g(x)$ (anomalie à l'air libre au point $x \in \mathbb{R}^2$) est une "variable régionalisée" (terminologie de Mr. Matheron). Nous signifierons par là que $\Delta g(x)$ "ressemble à une fonction aléatoire mais n'en a pas toutes les propriétés. En effet : $\Delta g(x)$ est unique au point x . Donc, en un point donné il nous sera difficile de définir une loi de probabilité. Par contre, dans les fonctions aléatoires couramment rencontrées on pouvait toujours avoir autant de réalisations différentes du même processus

(1) Mr. Matheron : Professeur de Géostatistique et probabilités à l'Ecole des Mines de Paris.

En fait la variable régionalisée $\Delta g(x)$ est la réalisation unique d'une certaine fonction aléatoire $y(x)$. Ceci va nous obliger à poser certaines hypothèses, de manière à pouvoir approcher les paramètres principaux (espérance et variance) de la fonction aléatoire $y(x)$, à partir de la seule réalisation $\Delta g(x)$.

Fonction aléatoire stationnaire

On dira que la fonction aléatoire $y(x)$ est stationnaire si, h étant un vecteur quelconque et x un point de l'espace considéré (\mathbb{R}^2 par exemple), les variables aléatoires $y(x)$ et $y(x+h)$ ont même loi. On dit encore que la fonction aléatoire est invariante par translation.

Sous l'hypothèse de stationnarité qu'advient-il de l'espérance mathématique? Supposons qu'en tout point x on ait $E(y(x)) = m(x)$. Or $y(x+h)$ a même loi que $y(x)$ donc :

$$E[y(x+h)] = E[y(x)] \\ m(x+h) \Rightarrow n(x) \quad M(x) = C^{\text{ste}}$$

$$\text{Donc : } E[y(x)] = m \quad \forall x$$

En général on posera $E[y(x)] = 0$, cas auquel il est toujours possible de se ramener.

Supposons maintenant que $y(x)$ admet une variance finie. Donc il existe une covariance $K(x, h) = E[y(x)y(x+h)]$

D'autre part, $K(x+a, h+a) = K(x, h)$ d'après la stationnarité. Donc $K(x, h)$ ne dépend pas de x :

$$K(h) = E[y(x)y(x+h)] \text{ fonction de covariance} \\ K(o) = E[(y(x))^2] \quad \text{variance}$$

L'existence de $K(o)$ conditionne l'existence de $K(h)$

Fonction aléatoire stationnaire d'ordre 2

Nous dirons que $y(x)$ est stationnaire d'ordre 2

$$\text{si } E[y(x)] = m < \infty \\ E[y(x)y(x+h)] - m^2 = K(h) < \infty \quad \forall h$$

Ces deux relations qui étaient le résultat de l'hypothèse de stationnarité n'entraînent pas cette dernière. Dans ce cas on dira aussi que $y(x)$ est faiblement stationnaire.

Fonction aléatoire intrinsèque

Il peut arriver que :

$$K(0) = E[y(x) - E[y(x)]]^2 = E[y(x)^2] - E^2[y(x)]$$

n'existe pas. Certains phénomènes ont un pouvoir de dispersion infini, et c'est bien souvent le cas en géophysique. Dans ce cas-là, on s'intéressera aux accroissements de la fonction $y(x)$, soit encore à la fonction aléatoire :

$$\gamma(x, h) = y(x+h) - y(x).$$

On dira que $y(x)$ est une fonction aléatoire intrinsèque si $\gamma(x, h)$ admet une espérance et une variance finie indépendante de x :

$$\begin{aligned} E[\gamma(x, h)] &= m(h) \\ E[\gamma(x, h)^2] &= 2\gamma(x) \end{aligned}$$

On démontre facilement que $m(h)$, que nous appellerons dérive, est linéaire, en effet :

$$y(x + h' + h'') - y(x) = y(x + h' + h'') - y(x + h'') + y(x + h'') - y(x)$$

en passant aux espérances :

$$m(h' + h'') = m(h') + m(h'')$$

sous cette hypothèse on pourra toujours se ramener à une fonction aléatoire centrée.

La fonction :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E[y(x+h) - y(x)]^2$$

s'appelle demi-variogramme ou fonction intrinsèque.

Si $y(x)$ est stationnaire d'ordre 2 on a :

$$\gamma(h) = K(0) - K(h)$$

Propriétés :

$$K(h) = K(-h)$$

$$\gamma(h) = \gamma(-h)$$

$$|K(h)| \leq K(0)$$

$$\gamma(h) \geq 0 \quad \gamma(0) = 0$$

Isotropie :

On dit qu'il y a isotropie si $\gamma(h) = \gamma(r)$ avec $r = \|h\|$. $\gamma(h)$ ne dépend plus de la direction du vecteur h mais seulement de son modèle. Dans le cas qui nous intéresse, nous verrons que c'est une hypothèse très forte.

Portée :

La portée $a(\alpha)$ dans une direction α est la distance à partir de laquelle $y(x)$ et $y(x+h)$ deviennent indépendants (non correlés)

Dans le cas de la stationnarité d'ordre 2 cela s'écrit :

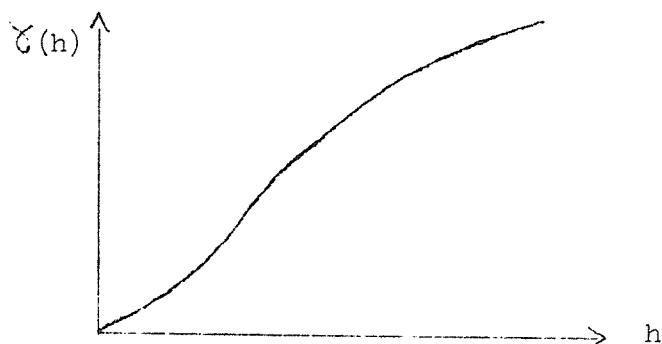
$$K(h) = 0 \text{ pour } |h| > a(\alpha) \quad \text{ou encore :}$$

$$\gamma(h) = \gamma(\infty) \text{ pour } |h| > a(\alpha)$$

Si seulement l'hypothèse intrinsèque est vérifiée on a une portée infinie car $\gamma(h)$ n'est pas bornée.

Continuité :

Le comportement de $\gamma(h)$ au voisinage de l'origine donnera une idée très nette de la régularité de $y(x)$ dans l'espace. Dans le cas qui nous intéresse, le variogramme construit à partir des observations de Δg est continu à l'origine ce qui traduit une bonne continuité de Δg sur la surface du globe :

Rappel sur les multiplicateurs de Lagrange

Minimisation d'une fonction avec contrainte.
Ce paragraphe n'a pas trait aux fonctions aléatoires, mais nous ferons souvent appel à la méthode des multiplicateurs de Lagrange dans les chapitres qui suivront. Aussi, il n'est pas sans intérêt de faire un bref retour sur ce procédé.

Soit à minimiser la fonction ;

$$f(X, \Lambda) = \Lambda X, \text{ par rapport à } \Lambda$$

$$\text{ou } \Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \\ = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

sous la contrainte de p équations :

$$g_1(X, \Lambda) = 0 ; \dots ; \dots \quad g_p(X, \Lambda) = 0.$$

On montre que le minimum est atteint quand on réalise :

$$\frac{\partial f(X, \lambda)}{\partial \lambda_i} + \mu_1 \frac{\partial g_1(X, \lambda)}{\partial \lambda_i} + \mu_2 \frac{\partial g_2(X, \lambda)}{\partial \lambda_i} + \dots + \mu_p \frac{\partial g_p(X, \lambda)}{\partial \lambda_i} = 0$$

pour tout i

Ceci nous donnera n équations qui ajoutées aux p équations g_1, g_2, \dots, g_p nous donnera un système à $n + p$ équations. Il faudra bien sûr que les fonctions g_j soient linéaires pour qu'on tombe sur un système linéaire à $n + p$ équations dont les inconnues seront :

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$$

En général les fonctions de contraintes g_j ne seront pas très nombreuses : deux ou trois au maximum.

- II -

Le krigeage simple (krigeage en l'absence de dérive).

Définition

Le krigeage (1) est une méthode d'estimation particulièrement adaptée aux problèmes de variables régionalisées, et de la géostatistique en général. Cette méthode permettra d'estimer la valeur prise par la variable régionalisée Δg en un point donné x , ou encore d'estimer la valeur moyenne de l'anomalie : $\bar{\Delta g} = \frac{1}{n} \sum \Delta g$ sur une surface S du globe, connaissant quelques observations : g_1, g_2, \dots, g_n aux points x_1, x_2, \dots, x_n , appartenant ou non à la surface S .

La méthode est à l'origine une méthode classique en statistique. On va estimer :

$$\bar{\Delta g}(x) = \int_S p(dx) \Delta g(x)$$

- (1) Le mot krigeage a été attribué à cette méthode d'estimation en hommage à D.G. KRIGE qui avait essayé d'appliquer les résultats statistiques aux problèmes miniers.

(moyenne pondérée sur une surface S) à l'aide d'une combinaison linéaire des mesures dont nous disposons :

$$\bar{\Delta g}^*(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \Delta g_i$$

Cet estimateur devra vérifier certaines conditions :

- universalité (estimateur sans biais)

$$E [\bar{\Delta g}^*(x)] = \bar{\Delta g}(x)$$

- optimalité (variance minimale)

$$\nabla \left[\bar{\Delta g}^*(x) - \bar{\Delta g}(x) \right] \text{ minimum}$$

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser seulement au cas où :

$$\begin{aligned} \bar{\Delta g}(x) &= \frac{1}{S} \int_S \Delta g(x) dx \\ p(dx) &= \frac{dx}{S} \end{aligned}$$

Ce cas là est facilement généralisable à une pondération quelconque, par exemple la mesure de Dirac en un point x_0 (ce qui nous donnera une estimation ponctuelle).

Regardons les résultats obtenus sous différentes hypothèses de base.

Cas de la stationnarité d'ordre 2

$$K(h) = E [\Delta g(x) \Delta g(x+h)] - m^2$$

existe indépendamment de x , avec : $m = E [\Delta g(x)]$

- Tout d'abord nous supposerons m connu.

On choisit l'estimateur

$$\bar{\Delta g}^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i \Delta g_i + \lambda_0 m$$

la condition d'universalité :

$$E[\bar{\Delta g}^*] = m \text{ nous donne la relation de contrainte :}$$

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$$

De par ailleurs, il faut minimiser

$$\begin{aligned} E[(\bar{\Delta g} - \bar{\Delta g}^*)^2] &= E[(\bar{\Delta g} - \lambda_0 m - \sum \lambda_i \Delta g_i)^2] \\ &= E[\bar{\Delta g}^2 - 2 \sum_i \lambda_i \Delta g_i \bar{\Delta g} + \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \Delta g_i \Delta g_j] \\ &= \sigma^2(\bar{\Delta g}) - 2 \sum_i \lambda_i \nabla(\bar{\Delta g}, \Delta g_i) + \sum_{i,j} \nabla(\Delta g_i, \Delta g_j) \lambda_i \lambda_j \end{aligned}$$

qui est la fonction à minimiser sous la contrainte : $\sum_i \lambda_i = m$
nous ne ferons pas les calculs. On obtient le système :

$$1 \quad \left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j \nabla(\Delta g_i, \Delta g_j) = \nabla(\bar{\Delta g}, \Delta g_i) \quad \forall i = 1, n \right.$$

qui nous permettra d'obtenir les coefficients λ_i optimaux.

On remarque bien sûr que :

$$\nabla(\Delta g_i, \Delta g_j) = K(x_i - x_j)$$

$$\nabla(\bar{\Delta g}, \Delta g_i) = \frac{1}{S} \int_S k(x - x_i) dx$$

la variance optimale s'écrit :

$$\begin{aligned} E[(\bar{\Delta g} - \bar{\Delta g}^*)^2] &= \nabla^2(\bar{\Delta g}) - \sum_i \lambda_i \nabla(\bar{\Delta g}, \Delta g_i) \\ &= K(0) - \sum_i \lambda_i \int_S k(x - x_i) \frac{dx}{S} \end{aligned}$$

- Nous supposerons maintenant m inconnu.

m étant inconnu, nous allons l'estimer de la façon la plus générale, c'est-à-dire par :

$$m^* = \sum a_i \Delta g_i$$

vérifiant seulement la condition :

$$E[m^*] = m = E[\Delta g]$$

ce qui revient à : $E\left[\sum a_i \Delta g_i\right] = m$

$$m \sum a_i = m \quad \sum a_i = 1$$

De là l'estimateur de $\bar{\Delta}g$ est :

$$\bar{\Delta}g^{**} = m^* + \sum \lambda_i (\Delta g_i - m^*)$$

$$\bar{\Delta}g^{**} = \sum_i a_i \Delta g_i + \sum_i \lambda_i \Delta g_i - \sum_i \lambda_i m^*$$

$$= \sum_i \Delta g_i (a_i + \lambda_i) - \sum_i \lambda_i (\sum_j a_j \Delta g_j)$$

$$= \sum_i \Delta g_i (a_i + \lambda_i) - \sum_i (a_i \Delta g_i \sum_j \lambda_j)$$

$$\bar{\Delta}g^{**} = \sum_i \Delta g_i (a_i + \lambda_i - a_i \sum_j \lambda_j)$$

posons : $\lambda'_i = a_i + \lambda_i - a_i \sum_j \lambda_j$

il reste : $\bar{\Delta}g^{**} = \sum_i \lambda'_i \Delta g_i$

avec : $\sum a_i = 1 \Rightarrow \sum \lambda'_i = 1 + \sum \lambda_i - \sum_j \lambda_j = 1$

D'où l'estimation avec contrainte :

$$\tilde{\Delta g}^{**} = \sum_i \lambda'_i \Delta g_i$$

$$\sum \lambda'_i = 1$$

On minimise $\text{Var}[\tilde{\Delta g} - \bar{\Delta g}]$ sous la contrainte et on obtient en utilisant les multiplicateurs de Lagrange :

$$(\forall i) : \sum_j \lambda'_j \Gamma(\Delta g_i, \Delta g_j) = \Gamma(\bar{\Delta g}, \Delta g_i) + \mu$$

$$\sum \lambda'_i = 1$$

La variance d'estimation $\text{Var}[\tilde{\Delta g} - \bar{\Delta g}^{**}]$ s'écrit :

$$\text{Var}[\tilde{\Delta g} - \bar{\Delta g}^{**}] = \Gamma^2(\bar{\Delta g}) - \sum_i \lambda'_i \Gamma(\bar{\Delta g}, \Delta g_i) + \mu$$

Remarque : Nous avons utilisé un estimateur m^* de m absolument quelconque, si ce n'est que $E[m^*] = m$.

Mais si nous prenons un estimateur optimal, c'est-à-dire vérifiant :

$$V[m - m^*] \text{ minimal,}$$

on montre facilement que cela revient au même de connaître m (estimation $\bar{\Delta g}^{**}$) ou de l'estimer par m^* d'une manière optimale (estimation $\tilde{\Delta g}^{**}$). Nous ne ferons pas les calculs.

Cas intrinsèque.

Nous ne supposerons pas l'existence d'une fonction de covariance $K(h)$ mais seulement de la fonction

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E[(\Delta g(x+h) - \Delta g(x))^2]$$

De plus, $E[\Delta g]$ n'existe pas non plus, tout au moins, nous ne posons pas son existence comme une hypothèse.

Dans le cas précédent nous avions obtenu :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_j \lambda_j K(x_i - x_j) = \frac{1}{s} \int_s K(x - x_i) dx + \mu \\ \sum_i \lambda_i = 1 \end{array} \right. \quad (\forall i)$$

Or on a la relation : $K(h) = K(0) - \gamma(h)$
 en transposant, ce qui est toujours possible (1) même si $K(h)$ et $K(0)$ sont infinis

$$\sum_j \lambda_j \gamma(x_i - x_j) = \frac{1}{s} \int_S \gamma(x - x_i) dx + \mu' \quad (A)$$

$$\sum_i \lambda_i = 1$$

μ' étant le multiplicateur de Lagrange, sous produit de la résolution du système.

- III -

Krigeage universel (ou krigeage en présence d'une dérive)

Nous supposons dans ce chapitre, que la variable régionalisée $\Delta g(x)$ est une réalisation d'une fonction aléatoire, Δg , non stationnaire en général :

$$1 \quad \begin{cases} E[\Delta g(x)] = m(x) \\ E[\Delta g(x) \Delta g(y)] = m(x) \times (y) + c(x, y) \end{cases}$$

nous appellerons $m(x)$ la dérive de $\Delta g(x)$

$c(x, y)$ est la fonction de covariance. D'ailleurs, il pourra arriver que cette fonction n'existe pas, et nous serons amenés à considérer des hypothèses moins restrictives, en remplaçant 1 par 2 :

$$2 \quad \begin{cases} E[\Delta g(x) - \Delta g(y)] = m(x) - m(y) \\ \frac{1}{2} V[\Delta g(x) - \Delta g(y)] = \gamma(x, y) \end{cases}$$

où $m(x)$, n'est défini qu'à une constante près.

En toute généralité, si $m(x)$ et $c(x, y)$ sont inconnus, le problème est insoluble.

(1) Mr. Matheron le montre dans son livre : Les variables régionalisées et leur estimation.

Mais on peut envisager d'estimer $m(x)$ dans un certain voisinage de x_0 , ou tout au moins de l'approcher par une fonction de type connu, dont nous estimerons les coefficients de manière optimale :

$$m(x) \underset{1}{\approx} f(x) = \sum a_1 f^1(x)$$

les fonctions $f^1(x)$ étant des fonctions de type connu : polynômes, fonctions trigonométriques. Les coefficients a_1 seront estimés de manière optimale.

Estimation optimale de la dérive

Plaçons nous dans le cas de l'hypothèse -1-, puis nous généraliserons au cas -2-.

Nous disposons des valeurs expérimentales : $\Delta g(x_\alpha) = \Delta g_\alpha$ posons : $\Gamma_{\alpha\beta} = C(x_\alpha - x_\beta)$

Il faut estimer : $m(x_0) = \sum_1 a_1 f^1(x_0)$ par $m^*(x_0) = \sum_\alpha \lambda^\alpha \Delta g_\alpha$

Cette estimation devant vérifier :

$$1) E[m^*(x_0)] = m(x_0)$$

$$\sum_\alpha \lambda^\alpha E[\Delta g_\alpha] = m(x_0)$$

$$\sum_\alpha \lambda^\alpha \sum_1 a_1 f^1_\alpha = m(x_0) \quad \left(\text{où } f^1_\alpha = f^1(x_\alpha) \right)$$

$$\sum_\alpha \sum_1 \lambda^\alpha a_1 f^1 = \sum_1 a_1 f^1(x_0)$$

$$\text{On pose } f^1(x) = b^1$$

La condition d'universalité s'écrit :

$$\sum_\alpha \lambda^\alpha f^1_\alpha = b^1 \quad (\forall 1)$$

2) $\text{Var}(m^*)$ doit être minimale

$$\begin{aligned} \text{Var}[m^*(x_0)] &= \sum_\alpha \sum_p \lambda^\alpha \lambda^p E[\Delta g_\alpha \Delta g_\beta] \\ &= \sum_\alpha \sum_\beta \lambda^\alpha \lambda^\beta \Gamma_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

en dérivant par rapport à λ^d , on obtient

$$\sum_f \lambda^p \sigma_{\alpha \beta} = \sum_1 m_i f_{\alpha}^l$$

qui est la condition d'optimalité.

Pour la variance, on trouve :

$$\text{Var} [m^*(x_0)] = \sum_1 l b^l = \sum_1 m_i f_{\alpha}^l (x_0)$$

Ceci nous donne bien sûr la valeur de l'estimation de $m(x_0)$. Mais il peut être utile d'avoir des estimations des coefficients a_1 , de manière à étendre cette estimation à un voisinage relativement proche.

On pose : $A_1 = a_1^*$

$$A_1 = \sum_{\alpha} \lambda_1^{\alpha} \Delta g_{\alpha}$$

On montre facilement que si l'on prend : λ_1^{α}

$$l \text{ tel que } m^*(x_0) = \sum_1 \lambda_1^{\alpha} b^l$$

On tombe sur des valeurs A_1 qui sont estimateurs sans biais et optimaux des a_1 .

La matrice λ_1^{α} vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\alpha} \lambda_1^{\alpha} f_{\alpha}^l = \delta_i^l \quad (\text{Kronecker}) \quad (\forall i, l) \\ \sum_p \lambda_1^p \sigma_{\alpha \beta} = \sum_1 m_i f_{\alpha}^l \quad (\forall \alpha, l) \end{array} \right.$$

Il existe bien sûr des relations intéressantes entre les coefficients résultant des deux méthodes d'estimation (estimation globale de la dérive, et estimation des coefficients de la dérive) :

$$\mu_{ij} = \text{cov} (A_i A_j)$$

Effectuons maintenant la transposition de ces résultats dans le cas de l'hypothèse -2-.

$m(x)$, n'est plus défini qu'à 1 constante près.

Pour l'hypothèse -1- nous avions :

$$m(x) = \sum_{l=0}^K a_l f^l(x) \quad \text{avec} \quad f^0(x) = 1$$

posons maintenant, sous l'hypothèse -2-

$$m(x) = \sum_{l=1}^k a_l f^l(x)$$

Pour que $m^*(x) = \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} \Delta g_{\alpha}$, estimateur optimal de dérive ait une variance finie, il faudra introduire une contrainte supplémentaire :

$\sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} = 0$ ce qui aura pour effet d'introduire, dans la minimisation de la variance, un coefficient de Lagrange supplémentaire.
On obtient par la matrice λ_i^{α} de l'estimateur $A_1 = \sum_{\alpha} \lambda_1^{\alpha} \Delta g_{\alpha}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_p \lambda_i^p D_{\alpha p} = - \sum_1 M_{11} f_{\alpha}^1 - C_1 \quad (\forall i, \alpha) \\ \sum_{\alpha} \lambda_i^{\alpha} f_{\alpha}^1 = f_i^1 \quad (\forall i, 1) \\ \sum_{\alpha} \lambda_i^{\alpha} = 0 \quad (\#_i) \end{array} \right.$$

où C_1 sont les coefficients de Lagrange supplémentaires introduits par la dernière contrainte, et $D_{\alpha p} = \delta(x_{\alpha}, x_p)$ est la valeur du demi-vario-gramme en x_{α} et x_p .

On a de même : $M_{ij} = \text{cov}(A_i, A_j)$.

Du fait que la dérive n'existe qu'à un coefficient a_0 près, l'estimation $m^*(x_0)$ trouvée ne sera valable que dans un voisinage V de x_0 . Dès qu'on passera à un autre voisinage V' de x'_0 on effectuera un raccordement dans deux dérives, à l'aide du coefficient a_0 .

Equations de krigeage universel

Nous allons écrire les équations du krigeage universel sous les deux hypothèses -1- et -2- déjà définies, et tout d'abord pour le cas où la quantité à estimer est une moyenne pondérée :

$$\bar{\Delta g} = \int_S p(dx) \Delta g(x)$$

ce qui est le cas le plus général

hypothèse -1- :

$$m(x) = \sum_{\alpha=1}^k a_\alpha f^\alpha(x) = E[\Delta g]$$

$C(x, y)$ existe

On dispose toujours de $\Delta g(x_\alpha) = \Delta g_\alpha$ $\alpha = 1, n$

et on pose : $\bar{\Delta g}^* = \sum_\alpha \lambda^\alpha \Delta g_\alpha$

On a tout d'abord : $E[\bar{\Delta g}^*] = E[\bar{\Delta g}]$

$$E\left[\sum_\alpha \lambda^\alpha \Delta g_\alpha\right] = \int_S p(dx) \sum_1^n a_1 f^1(x)$$

$$\sum_\alpha \lambda^\alpha \sum_1^n a_1 f^1(x_\alpha) = \int_S p(dx) \sum_1^n a_1 f^1(x) \text{ il vient}$$

$$\sum_\alpha \lambda^\alpha f_\alpha^1 = \int_S p(dx) f^1(x) = b^1 \quad (\dagger^1)$$

Ceci était la condition d'universalité.

Il faut maintenant minimiser la variance :

$$\text{Var}[\bar{\Delta g} - \bar{\Delta g}^*] = \text{Var}[\bar{\Delta g}] - 2 \text{cov}[\bar{\Delta g}, \bar{\Delta g}^*] + \text{var}[\bar{\Delta g}^*]$$

en développant, on trouve :

$$\begin{aligned} \text{Var}[\bar{\Delta g} - \bar{\Delta g}^*] &= \text{Var}[\bar{\Delta g}] - 2 \sum_\alpha \lambda^\alpha \text{cov}[\bar{\Delta g}, \Delta g_\alpha] \\ &\quad + \sum_\alpha \sum_B \text{cov}[\Delta g_\alpha, \Delta g_B] \lambda^\alpha \lambda_B \end{aligned}$$

en appliquant les multiplicateurs de Lagrange on trouve :

$$\sum_B \lambda^B C(x_\alpha, x_B) = \text{cov}[\bar{\Delta g}, \Delta g_\alpha] + \sum_1^n \mu_1 f_\alpha^1 \quad (\dagger \alpha)$$

qui est la condition d'optimalité.

D'où le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} f_{\alpha}^1 = \int_S p(dx) f^1(x) \quad (\forall 1) \\ \sum_{\beta} \lambda^{\beta} \sigma_{\alpha\beta} = \text{cov}(\bar{Ag}, Ag_{\alpha}) + \sum_1 \mu_1 f_{\alpha}^1 \quad (\forall \alpha) \\ [\text{cov}(\bar{Ag}, Ag_{\alpha}) = \int_S p(dx) ((x, x_{\alpha}))] \end{array} \right.$$

Il est assez facile de se ramener au cas ponctuel. Pour cela il suffit de poser :

$$\begin{aligned} p(dx) &= 1 \quad \text{si } x = x_0 \\ &= 0 \quad \text{ailleurs} \end{aligned}$$

x_0 étant le point où l'on doit estimer Δg .

il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} f_{\alpha}^1 = f^1(x_0) \quad \forall 1 \\ \sum_p \lambda^p \sigma_{\alpha p} = C(x_0, x_{\alpha}) + \sum_1 \mu_1 f_{\alpha}^1 \quad (\forall \alpha) \end{array} \right.$$

Une propriété importante de ce système est que si le point x_0 est l'un des points x_{α} (x_i par exemple) on retrouve bien, pour l'estimation de $\Delta g(x_0)$ la valeur $\Delta g_i = \Delta g(x_i)$.

En ce qui concerne la variance d'estimation, on montre que :

$$\begin{aligned} \text{Var}[\bar{Ag} - \bar{Ag}^*] &= \text{Var}[\bar{Ag}] - \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} \text{cov}(\bar{Ag}, Ag_{\alpha}) \\ &\quad + \sum_{\alpha} \sum_1 \mu_1 \lambda^{\alpha} f_{\alpha}^1 \end{aligned}$$

Hypothèse -2- $m(x) = \sum_{l=1}^k a_l f^l(x)$

$\mathcal{T}(x, y)$ existe

Quelles que soient les hypothèses fixées, il faut que $\text{Var}[\bar{Ag} - \bar{Ag}^*]$ existe.

Ceci entraîne : $\sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} = \int_S p(dx)$
(qui est souvent égal à 1).

En ce qui concerne la condition d'universalité, il n'y a aucun changements par rapport à -1-

$$\sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} f_{\alpha}^1 = \int_S p(dx) f^1(x) = b^1 \quad (\forall 1)$$

En effet, cette formule ne fait pas intervenir la fonction de covariance.

Il faut minimiser $\text{Var} [\Delta g - \Delta g^*]$

On obtient, compte tenu des deux contraintes :

$$\sum_p \lambda^p \gamma(x_{\alpha}, x_p) = \int_S p(dx) \gamma(x_{\alpha}, y) - \sum_l \mu_l f^l - \mu_0 \quad (\forall \alpha)$$

D'où le système de Krigage

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_p \lambda^p \gamma_{\alpha p} = \int_S p(dx) \gamma(x_{\alpha}, y) - \sum_l \mu_l f^l - \mu_0 \quad (\forall \alpha) \\ \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} f_{\alpha}^1 = \int_S p(dx) f^1(x) \quad (\forall 1) \\ \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} = : \int_S p(dx) \quad (= 1) \end{array} \right.$$

En ce qui concerne la variance :

$$\text{Var} [\Delta g - \Delta g^*] = \sum_{\alpha} \int_S \gamma(x_{\alpha}, y) p(dx) - \iint_S p(dx)p(dy) \gamma(x, y) + \sum_l \mu_l b^l + \mu_0$$

Le calcul étant analogue à celui de l'hypothèse -1-.

Variogramme de résidus expérimentaux.

Estimation des paramètres

Au cours de la résolution des systèmes d'estimation de dérive et de krigage universel, nous avons besoin de faire des hypothèses sous la forme du variogramme brut : $\gamma(x, y)$. Par exemple :

$$\gamma(x, y) = \begin{cases} \bar{w} |h|^{\alpha} & \text{ou} \\ \bar{w} e^{-ah} & \text{avec } h = (x - y) \end{cases}$$

A partir de ces hypothèses on déduit l'estimation optimale de la dérive

$$m^*(x) = \sum_l \Delta_l f^l(x)$$

A partir de là on pourra construire le variogramme des résidus expérimentaux, c'est-à-dire le variogramme de la variable $\Delta g(x) - m^*(x)$

soit par exemple $\bar{\gamma}^*(h)$ le variogramme obtenu

On va ensuite comparer $E[\gamma^*(h)]$ au variogramme moyen $\bar{\gamma}(h)$ défini par :

$$2\bar{\gamma}(h) = \frac{1}{k(h)} \int \gamma(x, x+h) k(x)k(x+h) dx$$

avec $K(h) = \int h(x)k(x+h) dx$

$$\text{et } k(x) = 1 \text{ si } x \in S \\ = 0 \text{ si } x \notin S$$

(fonction indicatrice de S , surface considérée).

$\bar{\gamma}(h)$ représente la moyenne du variogramme brut $\gamma(x, x+h)$ quand x parcourt la surface S considérée.

Par contre le variogramme des résidus expérimentaux a pour espérance :

$$E[2\gamma^*(h)] = E[(\Delta g(x+h) - m^*(x+h) - \Delta g(x) + m^*(x))^2]$$

En développant le carré on obtient :

$$E[2\gamma^*(h)] = 2\bar{\gamma}(h) - B$$

B étant un biais qu'on sait calculer :

$$B = \sum_{l,s} \mu_{ls} T^{ls}$$

avec :

$$T^{ls} = \frac{1}{k(h)} \int [f^l(x+h) - f^l(x)][f^s(x+h) - f^s(x)] k(x)k(x+h) dx$$

quantités que l'on sait évaluer quand on connaît la fonction $f^l(x)$

Donc le variogramme des résidus est biaisé par rapport au variogramme moyen brut :

$$E[\gamma^*(h)] = \bar{\gamma}(h) - \frac{1}{2} \sum_{l,s} \mu_{ls} T^{ls}$$

(les coefficients μ_{ls} sont les multiplicateurs de Lagrange obtenus en résolvant le système d'estimation optimal de dérive : $\mu_{ls} = \text{cov}(A_1, A_s)$)

On remarque que μ_{ls} est une matrice de type positif. Donc :

$$E[\gamma^*(h)] \leq \bar{\gamma}(h)$$

Le biais observé peut parfois être si important, que l'expérimentateur, au vu d'un variogramme des résidus presque plat, risque d'en déduire l'indépendance de ces mêmes résidus, ce qui est erroné.

Le variogramme expérimental va nous permettre de régler deux problèmes :

- Isotropie

Il faut vérifier que le variogramme des résidus ne varie pas trop quand on change la direction. Ceci nous confirmera le fait que l'isotropie est prise en charge par la dérive.

- Estimation du facteur ω

Dans le cas où on fait une hypothèse du type $\gamma(h) = \bar{\omega}|h|^d$, la pente à l'origine du variogramme des résidus nous donne une bonne estimation du coefficient ω , ce qui n'était pas possible avec le variogramme brut, car l'anisotropie biaisait complètement cette estimation.

A remarquer que la non-connaissance du paramètre ω ne nous gênaît pas du tout dans l'estimation optimale de dérive car celui-ci n'intervenait que dans l'évaluation de la variance d'estimation de la dérive.

M. ALBUISSON
Bureau Gravimétrique International

BIBLIOGRAPHIE

G. MATHERON - Les variables régionalisées et leur estimation (thèse).

G. MATHERON - Les cahiers du Centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau :

- 1) Cours de Géostatistique
- 2) Le krigeage universel

QUELQUES FONCTIONS ALEATOIRES UTILISEES
EN GRAVIMETRIE ET LEURS PROPRIETES

- I - Les fonctions aléatoires stationnaires (F.A.)
 - II - La fonction de covariance $K(h)$
 - III - La régularisation des fonctions aléatoires stationnaires d'ordre 2.
 - IV - Estimation de la teneur moyenne d'une F.A. dans un domaine borné V .
 - V - Une régularisation particulière : les fonctions aléatoires à support non ponctuel.
-

Ce texte commente et apporte certains compléments à l'article du même auteur (Bulletin Géodésique n°94, p.427-441, Décembre 1969).

I - LES FONCTIONS ALÉATOIRES STATIONNAIRES

. Hypothèse de stationnarité (sens strict)

Soit une fonction aléatoire $Y(x)$ opérant dans \mathbb{R}^n ou dans un espace vectoriel topologique de dimension finie isomorphe à \mathbb{R}^n . On dira que $Y(x)$ est stationnaire si sa loi reste invariante par toute translation d'ensemble de ses points. On peut exprimer ceci par :

$$\forall a, x_1, x_2 \dots x_k \in \mathbb{R}^n \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}$$

$Y(x)$ stationnaire \Leftrightarrow

$$Y(x_1), Y(x_2), \dots, Y(x_k) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(x_1+a), Y(x_2+a), \dots, Y(x_k+a)$$

(convergence en loi)

. Espérance mathématique ou dérive

Au point d'appui x_0 , on a :

$$m(x_0) = E[Y(x_0)]$$

$$\text{Stationnarité} \Rightarrow m(x_0) = m(x_0+a) \quad \forall a \in \mathbb{R}^n$$

Il y a donc unicité et constance de l'espérance mathématique

$$M = E[Y(x)] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Nous donnerons désormais à cette entité le nom de dérive par analogie à la notion de "trend", aucun de ces deux concepts n'étant d'ailleurs réductible l'un à l'autre.

. Covariance

Si on considère deux points d'appui x_0 et $x_0 + h$, la covariance a pour expression :

$$K(x_0, h) = E[(Y(x_0) - m)(Y(x_0+h) - m)]$$

Dans le cas présent de stationnarité, m étant constante nous voyons que nous ne diminuons pas la généralité du raisonnement en supposant que :

$m = 0$ quitte à remplacer $Y(x)$ par $Y(x) - m$.

Donc :

$$K(x_0, h) = E[Y(x_0) Y(x_0+h)]$$

$$\text{Stationnarité} \Rightarrow K(x_0, h) = K(x_0+a, h) \quad \forall a \in \mathbb{R}^n$$

La covariance se définit donc comme seule fonction de h .

$$K(h) = E[Y(x) Y(x+h)] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

. Isotropie

On dira que le phénomène est isotrope si la fonction de covariance ne dépend que du module de h .

On a : $K(r)$ avec $r = |h|$ en prenant la norme relative à l'espace vectoriel topologique support de la F.A.

. Hypothèse de stationnarité d'ordre 2

On dit que la F.A. $Y(x)$ est stationnaire d'ordre 2 si et seulement si :

$$\begin{cases} - \exists m / m = E[Y(x_0)] \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \\ - \exists K(h) / \forall h, K(h) = E[Y(x_0 + h) - Y(x_0)] - m^2 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Ces deux hypothèses suffisent pour les études que nous ferons dans la suite, elles n'entraînent pas la stationnarité au sens strict, cependant elles supposent l'existence d'une variance à priori finie $K(0)$.

. En gravimétrie

Nous aurons ici $n = 2$ avec :

$$x = \begin{pmatrix} \lambda \\ \varphi \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \lambda &= \text{longitude} \\ \varphi &= \text{latitude} \end{aligned}$$

$Y(x) = \Delta g(x)$ anomalie à l'air libre, de Bouguer ou isostatique
 $K(h) = C(h)$ notation en général adoptée.

II - LA FONCTION DE COVARIANCE $K(h)$

On se placera désormais dans le cas d'une fonction aléatoire stationnaire d'ordre 2 de moyenne nulle ($m = 0$).

. La fonction $K(h)$ est de type positif

En effet, si :

$$D^2 [Y(x_0)] = \text{variance de la F.A. } Y \text{ au point } x_0$$

Il faut réaliser, pour obtenir l'existence d'une variance dans tous les cas :

$$D^2 \left[\sum_{i \in J^k} \lambda_i Y_{(x_i)} \right] \geq 0 \quad \forall x_i \in \mathbb{R}^n, \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ (scalaires)}$$

et $\forall k \in \mathbb{N}$

On a ici :

$$\begin{aligned} D^2 \left[\sum_{i \in J^k} \lambda_i Y_{(x_i)} \right] &= \sum_{i, j \in J^k} \lambda_i \lambda_j E[Y_{(x_i)} Y_{(x_j)}] \\ &= \sum_{i, j \in J^k} \lambda_i \lambda_j K(x_j - x_i) \end{aligned}$$

Dire que :

$$\sum_{i, j \in J^k} \lambda_i \lambda_j K(x_j - x_i) \geq 0 \quad \forall x_i \in \mathbb{R}^n, \lambda_i \in \mathbb{R}$$

et $\forall k \in \mathbb{N}$

est une manifestation particulière de la propriété caractéristique des fonctions continues $f(x)$ de type positif (définie positive) qui sont telles que :

$$\sum_{i, j \in J^k} \lambda_i \bar{\lambda}_j f(x_i - x_j) \geq 0 \quad \forall x_i \in \mathbb{R}^n, \lambda_i \in \mathbb{C}$$

et $\forall k \in \mathbb{N}$

La fonction de covariance appartenant à cette classe de fonctions en possède donc toutes les propriétés particulières.

Symétrie

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow K(h) = K(-h)$$

(symétrie hermitique)

Bornée par sa valeur à l'origine et nécessairement positive

$$\begin{cases} f(0) \geq 0 \\ |f(x)| \leq f(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K(0) \geq 0 \\ K(h) \leq K(0) \end{cases}$$

Rappelons de plus le théorème essentiel dans l'étude de ces fonctions que constitue l'énoncé de Bochner :

$f(x)$ continue de type positif $\Leftrightarrow f(x)$ transformée de Fourier d'une mesure positive sommable μ vérifiant

$$\int d\mu = f(0)$$

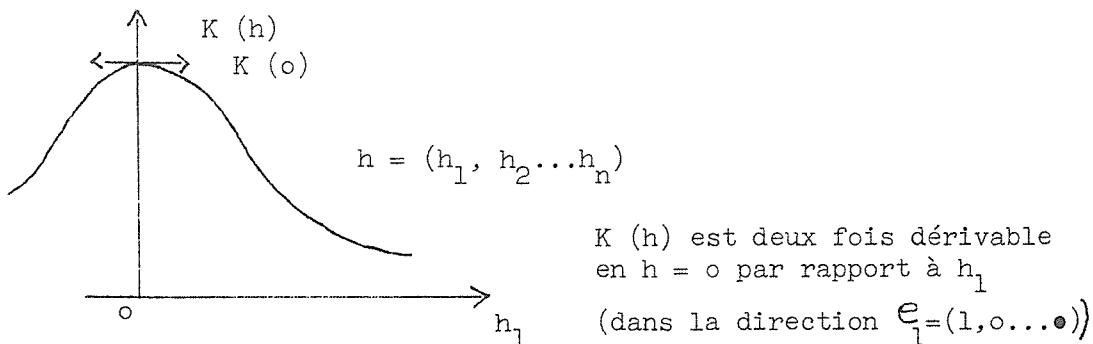
Dans le cas particulier de notre étude, cette mesure sommable serait donc telle que :

$$K(\mathbf{o}) = \int d\mu$$

Comportement de $K(h)$ au voisinage de l'origine

La continuité et la régularité dans l'espace de la F.A. $Y(x)$ s'expriment dans le comportement du $K(h)$ au voisinage de l'origine.

a) Comportement parabolique



Nous dirons que la F.A. $Y(x) = Y(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est dérivable en moyenne quadratique par rapport à u_1 au point $x = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ et a en ce point pour dérivée partielle en u_1 la F.A. $\frac{\partial Y}{\partial u_1}$

Si on a :

$$\lim_{\substack{|h_1| \rightarrow 0 \\ h_1 \in \mathbb{R}}} E \left\{ \left[\frac{Y(u_1 + h_1, u_2, \dots, u_n) - Y(u_1, u_2, \dots, u_n)}{h_1} - \frac{\partial Y(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial u_1} \right]^2 \right\} = 0$$

On montre que :

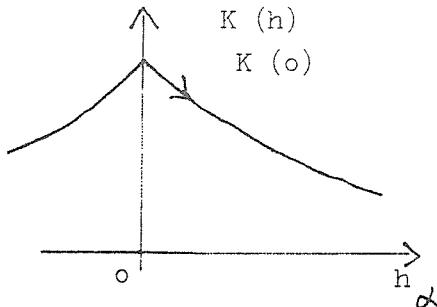
$$Y(x) \text{ stationnaire d'ordre 2 partout dérivable en moyenne} \iff K(h) = K(h_1, h_2, \dots, h_n) \text{ deux fois dérivable par rapport à } h_1 \text{ au point } h = \mathbf{o}$$

Alors dans ces conditions $K(h)$ est deux fois dérivable par rapport à h_1 en tout point h , et on a :

$$E \left[\frac{\partial Y}{\partial u_1}(x+h) \quad \frac{\partial Y}{\partial u_1}(x) \right] = - \frac{\partial^2}{\partial h_1^2} K(h)$$

Remarque : On peut trouver une certaine analogie entre cette propriété à l'origine de $K(h)$ et l'utilisation du développement limité à l'origine de $C(r)$ dans Moritz (6) page 43.

b) Comportement linéaire



$K(h)$ continue en $h = 0$ mais non dérivable.

Sur l'axe $h \not\propto$, on porte les variations de $|h|$ priorisées dans la direction $\not\propto$.

Nous dirons que la F.A. $Y(x)$ est continue en moyenne quadratique au point x_0 , si on a :

$$\lim_{|x-x_0| \rightarrow 0} E \left\{ [Y(x) - Y(x_0)]^2 \right\} = 0$$

Dans le cas de la stationnarité d'ordre 2, cette condition entraîne que $Y(x)$ est continue en tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a alors :

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} E \left\{ [Y(x) - Y(x+h)]^2 \right\} = 0$$

d'où :

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} [K(h)] = K(0)$$

Autrement dit :

$Y(x)$ stationnaire d'ordre 2 \iff $K(h)$ continue en $h = 0$
continue en moyenne quadratique

. Développement limité dans le cas isotrope de $K(r)$ au voisinage de $r = 0$

On caractérise le comportement de $K(h)$ par un développement limité de la forme :

$$K(r) = K(0) + \underbrace{\sum_n a_{2n} r^{2n}}_{\text{Partie régulière}} + \underbrace{\sum_\lambda c_\lambda r^\lambda}_{\text{Partie irrégulière}} + \underbrace{\sum_n c_{2n} r^{2n} \log r}_{\text{Partie irrégulière}}$$

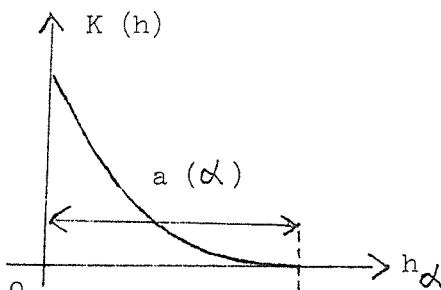
On distingue :

- une partie régulière (termes de degré entier pair)
- une partie irrégulière (termes en r^λ avec λ différent d'un entier pair + termes logarithmiques)

En l'absence de partie irrégulière, la fonction est indéfiniment dérivable c'est donc la partie irrégulière qui représente le degré d'irrégularité de la F.A. et plus particulièrement :

degré d'irrégularité de $Y(x)$ = plus bas degré λ du terme irrégulier principal.

. Portée



Dans le cas stationnaire d'ordre 2 la portée $a(\alpha)$ dans la direction α est la valeur de la distance au-delà de laquelle, dans cette direction, $Y(x)$ et $Y(x+h_\alpha)$ sont de corrélation négligeable.

$$\text{Donc : } |h_\alpha| \geq a(\alpha) \Rightarrow K(h) \approx 0 \quad (\text{voisin de})$$

. Anisotropie géométrique

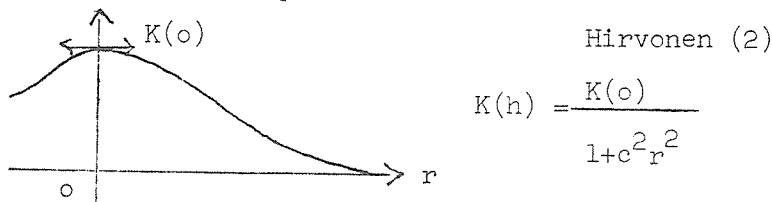
On est dans ce cas lorsqu'une simple transformation linéaire sur les coordonnées permet de se ramener au cas isotrope. Il est alors légitime d'envisager une fonction de covariance de la forme :

$$\begin{aligned} K(h) &= K(Q) \\ \text{avec : } h &= (h_1, h_2 \dots h_n) \\ Q &= \sum_{i,j \in [n]} a_{ij} h_i h_j \quad (\text{forme quadratique}) \end{aligned}$$

. Les différents modèles de $K(h)$ jusqu'ici envisagés en gravimétrie

Remarquons tout d'abord que jusqu'à présent on s'est presque toujours placé dans le cas de l'hypothèse isotrope.

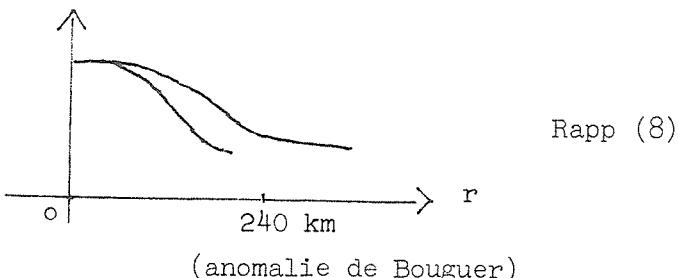
a) Comportement parabolique



Hirvonen (2)

$$K(h) = \frac{K(o)}{1+c^2 r^2}$$

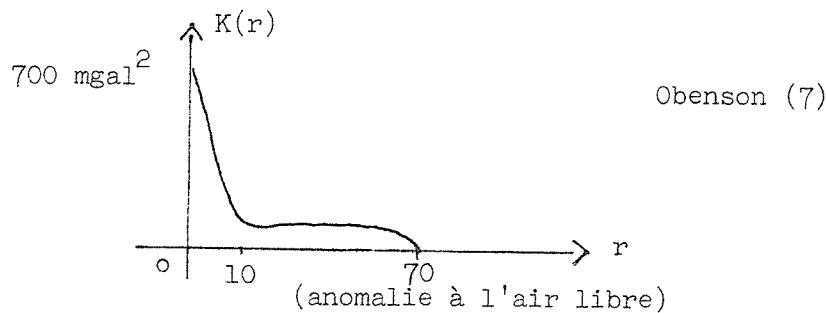
(anomalie à l'air libre)



Rapp (8)

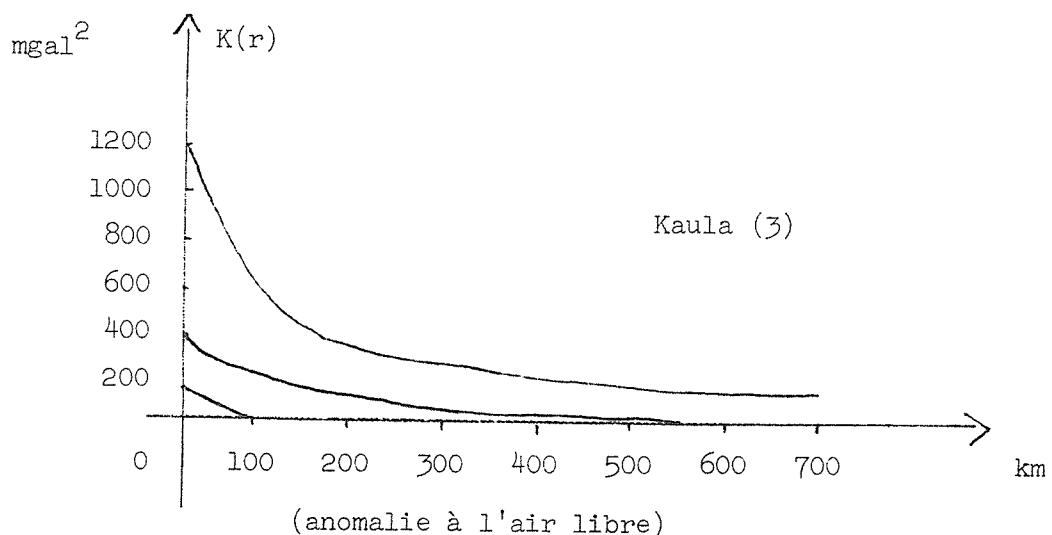
(anomalie de Bouguer)

b) Comportement linéaire



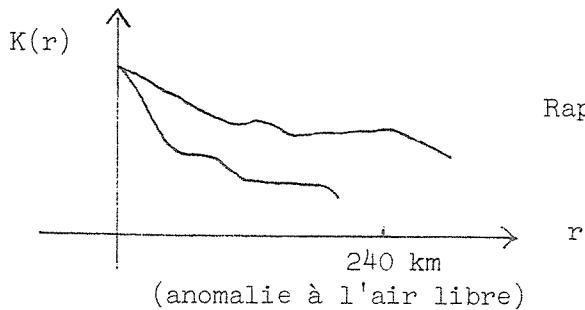
Obenson (7)

(anomalie à l'air libre)



Kaula (3)

(anomalie à l'air libre)



Rapp (8)

Ce petit glossaire de travaux jusqu'ici effectués, qui ne prétend pas être exhaustif nous permet tout de même de faire quelques remarques :

- On retrouve le caractère de plus grande irrégularité manifesté par l'anomalie à l'air libre vis-à-vis de l'anomalie de Bouguer.

- Seul le modèle d'Hirvonen paraît être un peu trop optimiste en traitant l'anomalie à l'air libre $\Delta g(x)$ comme une fonction stochastiquement dérivable.

- On peut cependant se demander si ce n'est pas la région témoin de l'Ohio, où les variations de l'anomalie à l'air libre sont assez régulières, qui à conduit à choisir ce modèle. Dans ce cas l'hypothèse de stationnarité ne serait pas suffisante à traduire la variabilité du phénomène à la surface du globe, il faudrait la remplacer par une notion plus locale et plus dynamique.

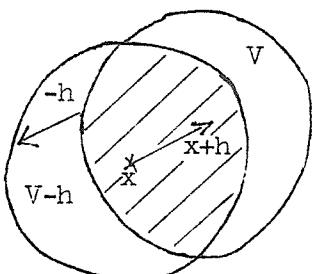
III - LA REGULARISATION DES FONCTIONS ALÉATOIRES STATIONNAIRES D'ORDRE 2

a) Covariogramme géométrique. Covariogramme transitif.

Soit une partie bornée V de \mathbb{R}^n , on appelle fonction caractéristique de V , la fonction $k(x)$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin V \\ 1 & \text{si } x \in V \end{cases}$$

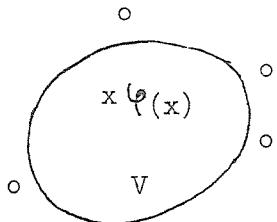
Si l'on désire avoir une certaine information sur la nature structurale de V il faut faire intervenir simultanément au moins deux points. Considérons le produit :



$$k(x) k(x+h) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in V \cap V-h \\ 0 & \text{si } x \notin V \cap V-h \end{cases}$$

Le covariogramme géométrique associé à V s'obtient en intégrant cette expression par rapport à x :

$$B(h) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x) k(x+h) dx = \text{Mes}(V \cap V-h)$$



Si l'on considère de même une fonction $\varphi(x)$ nulle en dehors du champ V borné, le covariogramme transitif de cette fonction sera l'expression $g(h)$ définie par :

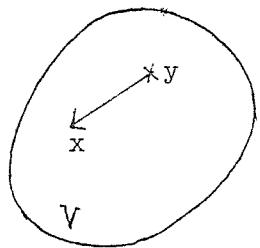
$$g(h) = \int \varphi(x) \varphi(x+h) dx$$

Remarques : - En utilisant la notation du produit de convolution, on a :

$$B = k * \check{k} \quad \text{et} \quad g = \varphi * \check{\varphi}$$

- La covariance $K(h)$ est la transposition probabiliste de $g(h)$.

b) Intégrale stochastique



Etant donné : - une F.A. $Y(x)$

- une fonction de pondération $p(x)$ relativement au domaine V on peut définir l'intégrale stochastique.:

$$I = \int Y(x) p(x) k(x) dx = \int_V Y(x) p(x) dx$$

C'est une variable aléatoire qui n'existe que si elle est de variance finie :

$$\begin{aligned} D^2(I) &= \int p(x) k(x) dx \int K(x-y) p(y) k(y) dy \\ &= \int p(x) dx \int_V K(x-y) p(y) dy \end{aligned}$$

c) Convolution stochastique - Régularisation.

La régularisée $Y_p(x)$ d'une F.A. $Y(x)$ par une fonction de pondération $p(x)$ est la "moyenne mobile pondérée" définie par :

$$Y_p(x) = \int Y(x+x') p(x') dx'$$

$Y_p = Y * p$ (produit de convolution stochastique)

Contrairement au cas précédent de l'intégrale stochastique, la régularisée $\frac{Y}{p}(x)$ est encore une F.A., plus régulière que $Y(x)$

La régularisée de $Y(x)$ est stationnaire d'ordre 2 et admet pour covariance :

$$K_p(h) = \int p(x) dx \quad \int K(h+x-y) p(y) dy$$

Si P est le covariogramme transitif de la fonction de pondération $p(x)$:

$$P = p * p$$

on démontre que :

$$K_p = K * P \quad \text{où } K \text{ est la fonction de covariance de } Y(x)$$

Remarquons qu'ici : $P = \overset{\vee}{P}$, ce qui peut nous faire dire que pour obtenir la covariance de la régularisée par P , on régularise sa covariance par le covariogramme transitif de p .

Exemples de fonctions de pondération

$$- p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{itx} \quad (\text{transformée de Fourier})$$

$$- p(x) = \frac{k(x)}{V} \quad (\text{pondération uniforme relative à un domaine } V)$$

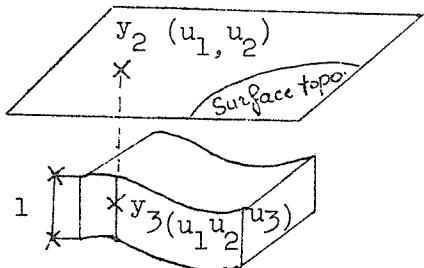
d) Montée

C'est un cas particulier de la régularisation. On appelle montée sous puissance constante l'opération qui fait passer de la F.A. :

$$Y_n(x) = \frac{Y}{n} (u_1, u_2, u_3 \dots u_n) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

à la fonction aléatoire :

$$Y_{n-1}(u_1, u_2, \dots u_{n-1}) = \int_0^1 Y(u_1, u_2, \dots u_n) du_n$$



Ex.: $Y_3(u_1, u_2, u_3)$ = teneur ponctuelle dans une formation minière stratiforme de puissance 1.

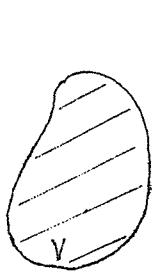
$Y_2(u_1, u_2)$ = accumulation du sondage implanté au point (u_1, u_2) de la surface topographique.

On démontre qu'aux courtes distances la montée a un effet régularisant.

IV - ESTIMATION DE LA TENEUR MOYENNE D'UNE F.A. DANS UN DOMAINE BORNE V

On envisage les erreurs d'estimation que l'on commet en étendant à un volume V la teneur moyenne de la F.A. $Y(x)$ dans un autre volume V' qui lui est proche. Ceci est semblable aux calculs classiques de "représentation" en gravimétrie (voir Moritz (6)).

a) Variance d'extension



Soient $Z(V)$ et $Z(V')$ les teneurs moyennes des deux domaines V et $V' \subset \mathbb{R}^n$.

$$Z(V) = \int_V Y(x) \frac{k(x)}{V} dx = \frac{1}{V} \int_V Y(x) dx$$

$$Z(V') = \frac{1}{V'} \int_{V'} Y(x) dx$$

Si V et V' sont bornés alors les variances de ces intégrales stochastiques existent et on a en particulier :

$$D^2 [Z(V)] = \sigma^2(V) = \frac{1}{V^2} \int_V dx \int_V K(x-y) dy$$

On peut même alors calculer la covariance $\sigma(V, V')$ de $Z(V)$ et $Z(V')$

$$Z(V) Z(V') = \frac{1}{VV'} \int_V Y(x) dx \int_{V'} Y(y) dy , \quad x \in V, y \in V'$$

d'où :

$$\sigma(V, V') = E [Z(V) Z(V')] = \frac{1}{VV'} \int_V dx \int_{V'} E [Y(x) Y(y)] dy$$

$$\sigma(V, V') = \frac{1}{VV'} \int_V dx \int_{V'} K(x-y) dy$$

Définition : On appelle variance d'extension de V à V' (ou de V' à V) la variance de l'erreur :

$$\epsilon_{VV'} = Z(V') - Z(V)$$

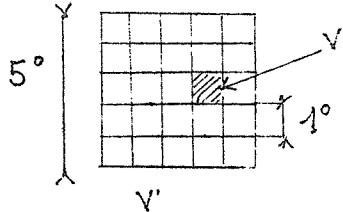
que l'on commet en attribuant à V' la teneur $Z(V)$ de V .

$$\text{D}^2 (\mathcal{E}_{VV'}) = \boxed{\nabla_E^2 = \nabla^2 (V) + \nabla^2 (V') - 2\nabla(V, V')}$$

D'une façon plus explicite :

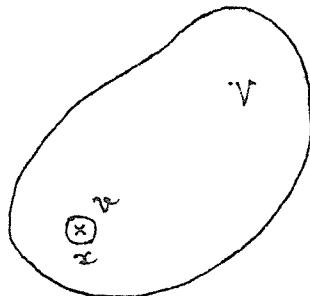
$$\begin{aligned} \nabla_E^2 &= \frac{1}{V^2} \int_V dx \int_V K(x-y) dy + \frac{1}{V'^2} \int_{V'} dx \int_{V'} K(x-y) dy \\ &\quad - \frac{2}{VV'} \int_V dx \int_{V'} K(x-y) dy \end{aligned}$$

Exemple d'utilisation en gravimétrie



Variance d'extension de la valeur moyenne de $\Delta g(x)$ dans $V = 1^\circ \times 1^\circ$ à $V' = 5^\circ \times 5^\circ$.

b) Variance d'un échantillon ponctuel dans un volume V



On considère que l'échantillon v est réduit à un point. Si on admet que l'on représente la teneur moyenne dans V à l'aide de la valeur de la F.A. en x, l'erreur d'extension (de représentation) sera :

$$\begin{aligned} \nabla^2(x|V) &= E\left\{ [Y(x) - Z(V)]^2 \right\} \\ &= E\left\{ [Y(x)]^2 \right\} + E\left\{ [Z(V)]^2 \right\} - 2E\{Y(x), Z(V)\} \\ &= K(o) + \frac{1}{V^2} \int_V dz \int_V K(z-y) dy \\ &\quad - \frac{2}{V} \int_V K(x-y) dy \end{aligned}$$

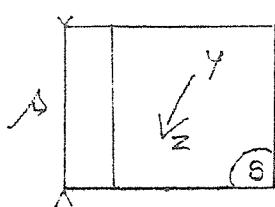
Ce résultat un peu compliqué peut se simplifier de façon notable lorsqu'on suppose que x est tiré au sort dans V avec une densité uniforme dx , on obtient alors une variance de représentation moyenne :

$$\nabla^2(o|V) = \int_V \nabla^2(x|V) dx$$

$$\boxed{\nabla^2(o|V) = K(o) - \frac{1}{V^2} \int_V dz \int_V K(z-y) dy}$$

On observe une formule qui se rapproche de celle trouvée par Hirvonen (2) avec cependant quelques aménagements de notation. Avec lui nous poserons :

$$K(o) = G_o^2$$



$$\begin{aligned} G_s^2 &= \frac{1}{s^4} \int_S dz \int_S K(x-y) dy \\ &= E \left\{ [\Delta g_s^2] \right\} \end{aligned}$$

$$\text{avec : } \Delta g_s^2 = \frac{1}{s^2} \int_S \Delta g(x) dx \quad (\text{teneur moyenne étendue à } S)$$

Si l'on pose alors :

$$E_s^2(x) = E \left\{ [g(x) - \Delta g_s]^2 \right\} = \sigma^2(x \mid S) \quad x \in S$$

Il nous faudra prendre ici :

$$\bar{E}_s^2 = \frac{1}{s^2} \int_S E_s^2(x) dx = \sigma^2(o \mid V)$$

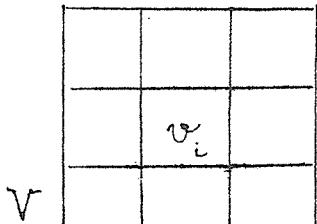
On retrouvera alors la forme classique :

$$\boxed{\bar{E}_s^2 = G_o^2 - G_s^2} \quad (1)$$

c) Variance d'un élément d'une équi-partition de V dans V

On considère une équi-partition d'un volume V , c'est-à-dire une famille $\{V_i\}$ de n parties égales et disjointes de V .

$$V = \bigcup_{i \in [m]} v_i \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v_i \cap v_j = \emptyset \quad \forall i, j ; i \neq j \in [m] \\ v_i = v \quad \forall i \in [m] \end{cases}$$



$$\text{Si } Z_i = \frac{1}{v} \int_{v_i} y(x) dx$$

$$\text{On a : } \sigma^2(v_i \mid V) = E \left\{ [Z_i - Z(V)]^2 \right\}$$

On envisage plutôt la moyenne de cette variance d'extension lorsque V_i décrit V , on l'appellera alors variance d'extension de v dans V .

$$\sigma^2(v|V) = \frac{1}{n} \sum_{i \in [m]} E\left\{ [Z_i - Z(V)]^2 \right\}$$

Explicitons les différents termes de cette somme

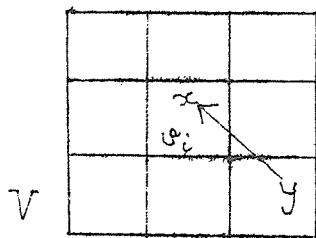
$$E\left\{ [Z(V)]^2 \right\} = \frac{1}{V^2} \int_V dx \int_V K(x-y) dy$$

$$E\left\{ Z_i^2 \right\} = \frac{1}{v^2} \int_{V_i} dx \int_{V_i} K(x-y) dy$$

$$\text{d'où : } \frac{1}{n} \sum_{i \in [m]} E\left\{ Z_i^2 \right\} = \frac{1}{v^2} \int_V dx \int_V K(x-y) dy$$

$$E\left\{ Z_i - Z(V) \right\} = \frac{1}{vv} \int_{V_i} dx \int_V K(x-y) dy$$

$$\begin{cases} \text{Mes}(V) = n \text{ Mes}(v) \\ v = \sum_{i \in [m]} v_i \end{cases}$$



On a, en confondant dans les notations mesure et ensemble :

$$\frac{1}{n} \sum_{i \in [m]} E\left\{ Z_i - Z(V) \right\} = E\left\{ [Z(V)]^2 \right\}$$

d'où :

$$\sigma^2(v|V) = \frac{1}{v^2} \int_V dx \int_V K(x-y) dy - \frac{1}{V^2} \int_V dx \int_V K(x-y) dy$$

On remarque qu'en particulier :

$$\boxed{\sigma^2(v|V) = \sigma^2(\circ|V) - \sigma^2(\circ|v)}$$

On peut d'ailleurs, à l'aide de cette formule, constater une relation d'additivité remarquable :

Etant donné trois volumes v , V , V' , compatibles au sens suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Mes}(v) < \text{Mes}(V) < \text{Mes}(V') \\ V = \sum_{i \in [m]} v_i \\ V' = \sum_{j \in [m']} v_j \end{array} \right.$$

On aura alors :

$$\overline{\sigma}^2(v|V') = \overline{\sigma}^2(v|V) + \overline{\sigma}^2(V|V')$$

Ceci rejoint les considérations de Hirvonen dans sa recherche d'une certaine forme de stabilité de la relation (1) lorsqu'on considère des carreaux imbriqués les uns dans les autres et de plus en plus grands.

On a :

$$\text{Mes}(v_i) = s^2$$

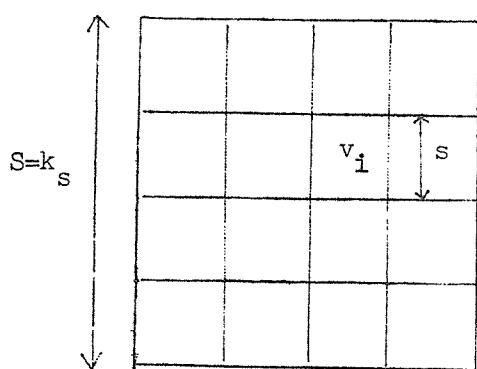
$$\text{Mes}(V) = k^2 s^2 = S^2$$

$$V = \sum_{i \in [k^2]} v_i$$

On sait que l'on a :

$$\overline{E}_s^2 = G_o^2 - G_{ks}^2 \quad \text{et}$$

$$\overline{E}_{ks}^2 = G_o^2 - G_{ke}^2$$



$$\text{Avec : } G_{ks}^2 = E\left[\Delta g_{ks}\right]^2$$

$$\overline{E}_{ks}^2 = \overline{\sigma}(o|V)$$

$$\Delta g_{ks} = \frac{1}{S} \int_V \Delta g(x) dx$$

Si l'on pose :

$$\mathcal{E}_{k_i} = \Delta g_{v_i} - \Delta g_{ks} \quad \text{avec} \quad \Delta g_{v_i} = \frac{1}{s^4} \int_{v_i} \Delta g(x) dx$$

On obtient alors :

$$D^2(\mathcal{E}_{k_i}) = G_s^2 + G_{ks}^2 - 2 \int_{v_i} dx \int_V K(x-y) dy$$

d'où :

$$\frac{1}{k^2} \sum_{i \in k^2} D^2(\mathcal{E}_{k_i}) = G_s^2 + G_{ks}^2 - 2 G_{ks}^2 \\ = \bar{E}_{ks}^2 - \bar{E}_s^2$$

À condition de poser :

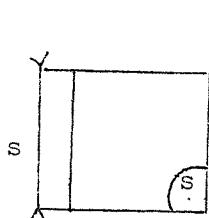
$$D^2(\mathcal{E}_k) = \frac{1}{k^2} \sum_{i \in k^2} D^2(\mathcal{E}_{k_i})$$

On retrouve la formule :

$$\boxed{\bar{E}_{ks}^2 = \bar{E}_s^2 + D^2(\mathcal{E}_k)}$$

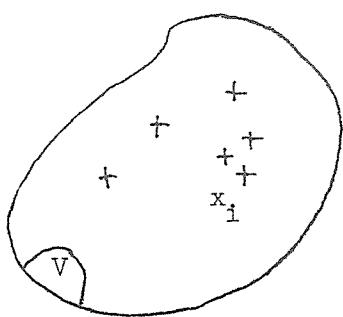
Nous voyons d'ailleurs qu'en utilisant les définitions que nous avons proposées, on peut alors légitimement envisager comme fonction de la taille s^2 des carreaux considérés, le quotient :

$$\boxed{B(s) = \frac{\bar{E}_s^2}{G_0^2} = \frac{\nabla(o | s^2)}{K(o)}}$$



$$B(s) = 1 - \frac{1}{s^4 K(o)} \int_S dx \int_S K(x-y) dy$$

d) Variance d'estimation de la teneur moyenne de V à l'aide d'un échantillonage ponctuel



On connaît la teneur moyenne de n prélèvements effectués en n points $x_i \in V$

$$Z' = \frac{1}{n} \sum_{i \in [n]} Y(x_i) \quad Z' \text{ est une variable aléatoire}$$

On appelle variance d'estimation de $Z(V)$ par Z' , l'expression :

$$\sigma_n^2 = D^2 [Z(V) - Z']$$

Par des raisonnements analogues à ceux nous ayant conduits au calcul de la variance d'extension, on trouve :

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= -\frac{2}{nV} \sum_{i \in [n]} \int_V K(x_i - x) dx + \frac{1}{V^2} \int_V dx \int_V K(x-y) dy \\ &\quad + \frac{1}{n^2} \sum_{i \in [n]} \sum_{j \in [n]} K(x_i - x_j) \end{aligned}$$

A l'observation de cette formule d'une structure assez remarquable, où l'on remarque une alternance entre expressions exactes et approchées d'une même intégrale, on note que la variance d'estimation σ_n^2 est d'autant plus faible que :

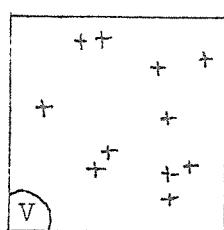
- Le réseau des prélèvements x_i est plus serré et plus représentatif du volume V que l'on veut estimer,

- la fonction $K(h)$ est plus régulière donc que la F.A. $Y(x)$ est elle-même plus continue dans sa variation spatiale.

Lorsque le nombre n d'échantillons devient grand, le calcul de l'expression précédente apparaît inextricable, même avec l'aide d'un ordinateur, on est donc conduit à chercher des formules d'approximation.

Néanmoins nous pouvons dès à présent examiner le cas simple des mailles (implantations des échantillons) aléatoires.

1 - Maille aléatoire pure



Les x_i sont ici implantés au hasard dans V indépendamment les uns des autres et avec une densité uniforme.

Dans ce cas, les erreurs partielles d'estimation :

$$\varepsilon_i = Y(x_i) - Z(V)$$

sont des V.A. indépendantes et de variance :

$$D^2(\varepsilon_i) = \sigma^2(o|V)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \sigma^2_n &= D^2 \left[Z(V) - \frac{1}{n} \sum_{i \in [m]} Y(x_i) \right] \\ &= \frac{1}{n^2} D^2 \left[\sum_{i \in [m]} [Z(V) - Y(x_i)] \right] = \frac{D^2(\varepsilon_i)}{n} \\ \sigma^2_n &= \frac{\sigma^2(o|V)}{n} \end{aligned}$$

Ce résultat se rapproche de ceux classiquement obtenus en statistique. Cependant, le modèle de maille aléatoire en gravimétrie est rarement proche de la réalité, on doit donc envisager quelque chose de plus élaboré.

2 - Maille aléatoire stratifiée

	+	+	+	+	+
	+	+	+	+	+
	+	+	+	+	v_1
	+	+	+	+	+
	+	+	+	+	+
V	+	+	+	+	+

On considère une équi-partition de V

$$V = \sum_{i \in [m]} v_i, \dim v_i = v \forall i \in [m]$$

Dans chaque v_i on implante un prélèvement en x_i choisi au hasard dans v_i et de façon indépendante du choix des x_j avec $i \neq j \in [m]$

Dans ce cas :

$$Z(V) - \frac{1}{n} \sum_{i \in [m]} Y(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i \in [m]} [Z(v_i) - Y(x_i)]$$

car :

$$Z(V) = \frac{1}{n} \sum_{i \in [m]} Z(v_i) \text{ avec } Z(v_i) = \frac{1}{v} \int_{V_i} Y(x) dx$$

d'où :

$$\boxed{\nabla^2_n = \frac{\nabla^2(o|v)}{n}}$$

Remarquons que dans ce cas la variance d'estimation est toujours inférieure à celle de la maille aléatoire pure car :

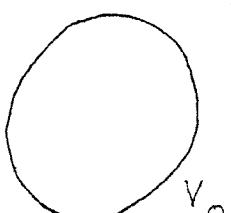
$$\frac{1}{n} [\nabla^2(o|v) - \nabla^2(o|v)] = \frac{1}{n} \nabla^2(v|v) \geq 0$$

V - UNE REGULARISATION PARTICULIERE : LES FONCTIONS ALEATOIRES A SUPPORT NON PONCTUEL.

En gravimétrie et en géodésie on est souvent amené, plutôt que d'étudier les anomalies ponctuelles, à utiliser des anomalies moyennes par degré carré ou toute autre surface. Nous allons montrer comment les propriétés de ces deux champs sont liées les unes aux autres.

a) Régularisée d'une F.A. par un volume V_o

On considère la fonction de pondération :

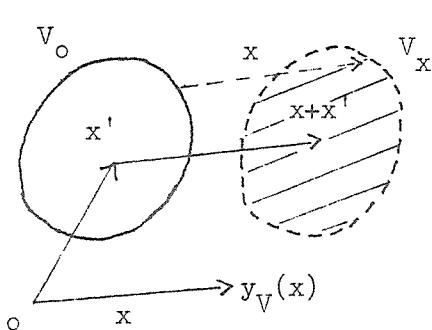


$$p(x) = \frac{k(x)}{V} \quad \text{avec } k(x) = \text{fonction caractéristique du volume } V_o$$

$$- V = \text{Mes } (V_o)$$

La régularisée correspondante de $Y(x)$ s'exprime par :

$$Y_V = Y * p$$



$$\text{d'où } Y_V(x) = \frac{1}{V} \int_{V_x} Y(x+x') k(x') dx'$$

$$= \frac{1}{V} \int_{V_x} Y(x+x') dx'$$

C'est la valeur moyenne de la F.A. (x) étendue au volume V_x , translaté de V_o par le vecteur x .

$$Y_V(x) = \frac{1}{V} \int_{V_x} Y(z) dz$$

b) Fonction de covariance de la F.A. $Y_V(x)$

Si B est le covariogramme géométrique du volume V_o

$$B = k * k$$

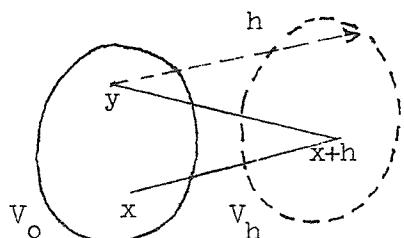
Nous avons vu que l'expression de la fonction de covariance de la F.A. $Y_V(x)$ a pour formule :

$$K_V = K * B$$

où $K(h)$ est la fonction de covariance de la F.A. ponctuelle $Y(x)$

$$(2) \quad K_V(h) = \int \frac{k(x)}{V} dx \int K(h+x-y) \frac{k(y)}{V} dy$$

$$= \frac{1}{V^2} \int_{V_o} dx \int_{V_o} K(h+x-y) dy$$



L'expression que nous obtenons n'est pas celle classiquement utilisée en gravimétrie, mais on peut s'y ramener avec facilité.

Si l'on revient à la définition de $K_V(h)$:

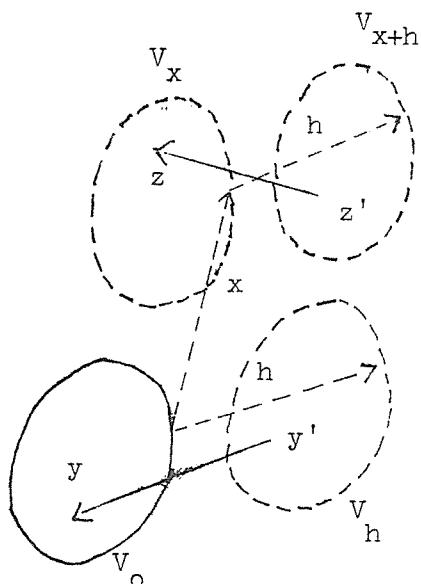
$$\begin{aligned} K_V(h) &= E \left\{ Y_V(x) \quad Y_V(x+h) \right\} \\ &= E \left\{ \frac{1}{V^2} \int_{V_x}^V Y(z) \, dz \int_{V_{x+h}}^V Y(z') \, dz' \right\} \end{aligned}$$

$$K_V(h) = \frac{1}{V^2} \int_V^x dz \int_{V_{x+h}}^V K(z-z') \, dz'$$

La F.A. $Y_V(x)$ étant une fonction stationnaire comme $Y(x)$, on a :

$$K_V(h) = E \left\{ Y_V(0) \quad Y_V(h) \right\}$$

$$K_V(h) = \frac{1}{V^2} \int_{V_0}^V dz \int_{V_h}^V K(y-y') \, dy'$$

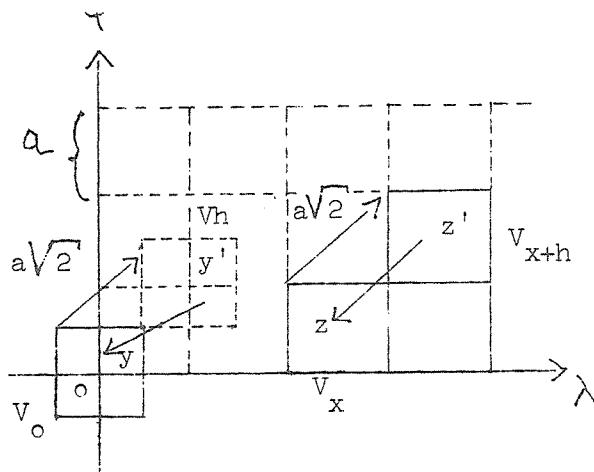


C'est l'expression que l'on emploie le plus couramment, dans laquelle, pour répondre à la logique des représentations cartographiques le volume V_0 est centré à l'origine.

Le plus souvent :

$$V = 1^\circ \times 1^\circ \text{ ou } 5^\circ \times 5^\circ$$

(Voir Groten (1))



On a ici :

$$h = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} \text{ et } x = \begin{pmatrix} \sqrt{3}a/2 \\ a/2 \\ a/2 \end{pmatrix}$$

Dans le cas isotrope

$$K_V(h) = K_V(r)$$

$$\text{ici } r = |h| = a\sqrt{2}$$

D'ailleurs en envisageant une grille de ce type on ne prend en considération qu'une famille restreinte de translatés V_x de V_0 telle que :

$$x = a/2 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \text{ où } \alpha, \beta \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

On ne pourra alors atteindre qu'un échantillonage discret de la fonction $K_V(h)$ pour lequel :

$$h = a \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{ où } u, v \in \mathbb{Z}$$

c) Les effets de la régularisation

On a :

$$K_V = K * B$$

et d'une manière plus générale si on étudie une régularisation par une fonction de pondération p , la covariance régularisée s'exprime par :

$$K_p = K * P \text{ où } P = p * p^T$$

On entend par régularisation le fait que si la fonction de pondération p est suffisamment régulière, P étant par exemple deux fois dérivable à l'origine alors même si K n'est pas dérivable à l'origine, K_p a la même propriété que P , ceci en vertu du comportement particulier, déjà signalé de la dérivation des produits convolutifs.

Cette propriété est particulièrement intéressante lorsque l'on étudie des F.A. $Y(x)$ particulièrement irrégulières. Mais en gravimétrie, $Y(x)$ est souvent de comportement continu et dans ce cas, il ne faudra pas attendre du type de régularisation envisagée une grande modification des propriétés de $K(h)$.

Jean-Marie MONGET

Bureau Gravimétrique International

GLOSSAIRE DES NOTATIONS EMPLOYEES

- Ensembles remarquables envisagés :

- \mathbb{N} = ensemble des nombres entiers positifs.
- \mathbb{Z} = ensemble des nombres entiers de signe quelconque.
- \mathbb{R} = corps des nombres entiers.
- \mathbb{C} = corps des nombres complexes.

- Logique des expressions :

- . $x \in E$: l'élément x appartient à l'ensemble E .
- . $x \notin E$: x n'appartient pas à E .
- . $\forall x$: quelque soit l'élément x .
- . $E \cap E'$: ensemble des x , appartenant à E et à E' .
- . $E \subset E'$: partie E de E' , inclue dans E .
- . $[n] = \{0, 1, 2, \dots, n\}$
- . $]n] = \{1, 2, \dots, n\}$
- . $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ u(x)}} u(x)$: limite de la suite $u(x)$ lorsque x tend vers l'infini

- Le produit de convolution :

- . $f * g$: f convoluée à g
- . $f * \overset{\vee}{g}$: f convoluée à la transposée de g
 $\overset{\vee}{g}(x) = g(-x)$

BIBLIOGRAPHIE

- (1) GROSEN - On gravity prediction using mean anomalies. 1965.
- (2) HIRVONEN - Statistical analysis of gravity anomalies. 1962.
- (3) KAULA - The Earth's gravitational field.
- (4) MATHERON - Les variables régionalisées et leur estimation.
- (5) MATHERON - Cours de géostatistique.
- (6) MORITZ - Interpolation and prediction of gravity and their accuracy.
- (7) OBENSON - Prediction accuracies of $5^\circ \times 5^\circ$ mean anomalies from $1^\circ \times 1^\circ$ means at different latitudes. 1968.
- (8) RAPP - Statistical analysis of gravity anomalies and elevations by long profiles and by areas. 1963.

LISTE des PUBLICATIONS

reçues au

BUREAU GRAVIMETRIQUE INTERNATIONAL

(Juin 1969 - Oct. 1969)

CONCERNANT LES QUESTIONS DE PESANTEUR

LISTE DES PUBLICATIONS

#

289 - I.U.G.G., I.A.G., Section IV - Gravimetry.

Report of the Special Study Group n°5 on the FIRST ORDER WORLD NET to the XIV General Assembly of the I.U.G.G., 348 p, 1967.

"The present report is intended for summarizing the situation concerning the gravity measurements made with pendulums and gravimeters for the solution of the First Order World Gravity Net and its standardization.

A short summary of the general problems is presented and then the pendulum measurements are introduced with a general presentation of the actual situations of the observations with various apparatus that can be employed in the modern adjustments on the worldwide scale.

The pendulum station descriptions and a summary of in-centre reductions are also presented.

The gravity meter measurements are discussed in brief general form and then presented with some details about the contributions given by the various cooperating Members and Organizations.

The general problem of the adjustment is presented and a path towards its solution is proposed.

A set of Annexes cover the pendulum and gravimeter observations : more detailed data have been or are on the way to be exchanged among the members of the Working Sub-group for the adjustment.

Unfortunately, not all the observed material has been already prepared in the required form, so that the set of Annexes presented in this report is not complete".

293 - HAMMOND J.A. & J.E. FALLER. - "Laser-interferometer system for the determination of the acceleration of gravity".

IEEE J., Quantum Electronics, v.QE-3, n°11, p.597-602, 1967.

"A system is described for determining the acceleration of gravity using a stabilized He-Ne laser as the light source in a Michelson-type interferometer which incorporates a freely falling corner reflector as one of its mirrors. The method effectively utilizes the most precise standards presently available for the measurement of length and time is capable of an accuracy of better than 5 parts in 10^8 ".

#

La numérotation n'est pas suivie car les publications ne se rapportant pas aux questions de pesanteur n'ont pas été indiquées.

- 294 - WHITHAM K. & D.H. WEICHERT. - "Geophysical results from digital processing of Yellowknife array signals".
from : Pub. Bur. Cent. Seis. Int., fasc. 24, p.30-43.
Contr. Dom. Obs., n°258, Ottawa, 1968.

"Results are described from the automatic digital processing of teleseismic signals from the medium aperture crossed seismic array at Yellowknife, N.W.T. Developments in the automatic processing method are described which increase the speed from that previously described. Epicentral uncertainties from a single array determination are outlined.

Intensive digital processing is described of a tape obtained by the superposition of the signals from the Early Rise chemical explosions at an epicentral distance of about 21° . The results and other observations from chemical explosions at 11° to 17° are compared with the predictions for the average upper mantle structure derived from observations of chemical explosions on the Canadian standard seismic network at long ranges. Preliminary upper mantle structural interpretations are given incorporating phase velocity data with time and distance data. The difficulties in self-consistent interpretations using velocity filtering are outlined. The best model to date requires only a very weak P-wave low velocity layer at considerable depth in the PreCambrian Shield".

- 295 - SERSON P.H., W. HANNAFORD & G.V. HAINES. - "Magnetic anomalies over Iceland".
Science, v. 162, p.355-357, 1968.

"An aeromagnetic survey of Iceland reveals broad anomalies of large amplitude over zones of recent volcanic activity. The source of the anomalies is ascribed to large masses of basalt that have been coherently remagnetized by intrusive heating. A simple correlation of the Icelandic anomalies with those of the ocean floor therefore appears unjustified".

- 297 - WICKENS A.J. & K. PEC. - "A crust mantle profile from Mould Bay, Canada to Tucson, Arizona".
from : Bull. Seis., Soc. America.
Contr. Dom. Obs., n° 241, 11 p, Ottawa, 1968.

"Love-wave phase velocities were determined for five adjacent segments of a 5000 kilometer great circle path from Mould Bay, Canada, to Tucson, Arizona. Mean-phase velocity curves were obtained from curves based on reciprocal data, thus minimizing the detrimental effects of non-parallel layering. By careful selection and precise treatment of the data over relatively short distances (800 km), detail hitherto suppressed has been retained. Finally, by using reciprocal seismograms, the effect of sloping interfaces was observed.

The crustal and upper mantle models obtained indicate significant differences in structure between different provinces of the Precambrian Shield".

298 - WEAVER D.F. - "Preliminary results of the gravity survey of the Island of Newfoundland with maps".

- N° 53, Avalon-Burin
- N° 54, La Poile-Burgeo
- N° 55, Notre Dame-Bonavista
- N° 56, St-Georges-White Bay
- N° 57, Harrington-Belle Isle.

Grav. Map Ser., Dom. Obs., 3 p, Ottawa, 1968.

"During the summer of 1964, a Dominion Observatory field party occupied about 1200 regional gravity stations on the Island of Newfoundland. A full discussion and interpretation of the results of this survey are given elsewhere in a publication of the Dominion Observatory by Weaver (1967)".

This report presents five Bouguer anomaly maps at a scale of 1/500,000, a short discussion of the methods used to observe and reduce the anomalies, and the main results of the gravity interpretation".

299 - WALCOTT R.I. - "The gravity field of Northern Saskatchewan and Northeastern Alberta with maps".

- N° 16, Green Lake-Stanley
- N° 17, Mudjatik-Geikie
- N° 18, Black Lake
- N° 19, Lake Athabasca
- N° 20, McMurray.

Grav. Map Ser., Dom. Obs., 21 p, Ottawa, 1968.

"The report area covers National Topographic System sheets 74 and 73 NE and includes most of northern Saskatchewan and part of northeastern Alberta, Canada. The principal feature of the Bouguer anomaly field is a belt of intense anomalies parallel to the northeast structural trend of the crystalline basement of the region, bounded on the northwest and southeast by regions of comparatively low gravity relief. This belt comprises the Fond du Lac low, a linear anomaly at least 500 kilometres long, about 70 kilometres broad and with an amplitude of about - 30 milligals, and the smaller Lisgar Lake and Stony Rapids highs with amplitudes of about + 20 milligals. The Fond du Lac low defines a belt of low-density rocks which geological mapping in one area suggests are granites. If the change in load due to the crustal density changes is compensated, as implied by studies of earth deformation due to unloading of Pleistocene Lakes, then the crust is about 6 kilometres thinner beneath the low than in adjacent areas. A three-dimensional model based on postulates of complete compensation and lateral changes in crustal density can explain the major features of the anomaly field".

300 - VALLIANT H.D. - "The effect of humidity on the length of invariable pendulums".

from : Geophys. J. R. Astr. Soc., v.17.
Contr. Dom. Obs., n°265, 6 p, Ottawa, 1969.

"A series of tests with the Canadian Pendulum Apparatus has revealed a definite relation between observed errors in gravity and humidity. These tests suggest that absorption of water by the agate bearings located on the pendulums tends to alter the position of the pendulum's centroid. This difficulty has been overcome by storing the pendulums in a dessicated chamber".

301 - GOODACRE A.K., B.G. BRULE & R.V. COOPER. - "Results of regional underwater gravity surveys in the Gulf of St-Lawrence with map".

- N° 86, Gulf of St-Lawrence.
Grav. Map Ser., Dom. Obs., 24 p, Ottawa, 1969.

"The Dominion Observatory regional underwater gravity survey of the Gulf of St-Lawrence was continued in 1966 and 1967. Some 1.200 gravity stations have now been established in the Gulf during the period 1962-1967. Equipment and survey techniques used in the survey are described and the method of reduction of the underwater gravity results is reviewed.

The Bouguer anomaly field over the norther portion of the Gulf of St-Lawrence is similar to that of the adjacent Precambrian Shield. A distinct change in anomaly level from negative in the north to more positive in the south occurs in the Gulf and is believed to mark the boundary between the Grenville and Appalachian geological provinces. Basic intrusive rocks characteristic of the boundary between these provinces are outlined by a belt of positive anomalies from Gaspé Peninsula to Port-au-Port Peninsula, Newfoundland. A gravity minimum of - 60 mgal near Magdalen Islands has been attributed to abnormally light Carboniferous sediments or Devonian granitic rocks or alternatively their combined effect. The gravity anomalies between southwestern Newfoundland and Cape Breton Island suggest a structural continuity between these areas".

303 - STACEY R.A. & L.E. STEPHENS. - "An interpretation of gravity measurements on the West Coast of Canada".

from : Canadian J. Earth Sci., v.6, n°3.
Contr. Dom. Obs., n° 277, 12 p, Ottawa, 1969.

"The survey area lies close to the continental margin and includes parts of the Insular Tectonic Belt and the Coast Mountains igneous and metamorphic complex, which are part of the Cordilleran (geological) Region.

In an endeavor to clarify the structure of the Insular Tectonic Belt and the Coast Mountains complex, gravity measurements have been made using Worden or LaCoste and Romberg meters at 12 - 15 km intervals throughout the Queen Charlotte Islands, Vancouver Island, and the coastal areas of the British Columbia mainland. Measurements have been made at the same interval using a LaCoste and Romberg underwater gravity meter wherever the depth of water is less than 300 fathoms (< 540 m.) along the fiords of the mainland coast and over the continental shelf. The observed gravity values have been reduced to Bouguer anomalies and terrain corrections have been calculated using either Bible's tables or a computer system based on the attraction of the rectangular prismatic block.

The major features of gravity field are :

- 1) A positive Bouguer anomaly along the western edge of the area, which is associated with the change from continental to oceanic crust, and
- 2) A negative anomaly along the Coast Mountains, which is attributed to the thickening of the continental crust below these mountains. On the eastern side of the Queen Charlotte Islands, Hecate Strait, Queen Charlotte Sound, and Vancouver Island, the average Bouguer anomaly is approximately zero, with local anomalies superimposed on a fairly flat gravity field. Several of these local anomalies are related to density variations in the surface rocks".

306 - Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society,
v.17, n°5, 1969.

- a) VALLIANT H.D. - "Gravity measurements on the North American calibration line with the Canadian pendulum apparatus".
p. 489-505.

"Gravity measurements have been made with the Canadian pendulum apparatus along the North American calibration line with an estimated accuracy of ± 0.08 mgal. Analysis of these data reveals no statistically significant systematic difference between the results of measurements made with gravimeters, Gulf pendulums, Cambridge pendulums and Canadian pendulums except for their respective inherent accuracies".

- b) FRANCIS T.J.G. - "Upper mantle structure along the axis of the Mid-Atlantic Ridge near Iceland".
p. 507-520.

Apparent velocity measurements of P arrivals from Mid-Atlantic Ridge earthquakes across pairs of stations in Iceland and Greenland have been made using bulletin data. They define both the vertical and horizontal extent of the low velocity anomalous mantle zone between 50° and 70° N".

307 - Geophysics, v. 34, n°2, 1969.

- a) KUO J.T., M. OTTAVIANI & S. SINGH. - "Variations of vertical gravity gradient in New York City and Alpine, New Jersey".
p. 235-248.

Careful gravity measurements with LaCoste-Romberg geodetic gravimeters were carried out in tall buildings on a floor-to-floor basis in New York City and on the Armstrong Tower, Alpine, New Jersey. Corrections for the instrumental drift and tidal gravity variation and for the Bouguer effect, topography, mass of the buildings, and subway and basement excavations have been applied to the gravity data, which are tied to the absolute gravity value of the National Gravity Base Station of Washington, D.C. The observed gravity versus elevation curves are nonlinear, particularly near the surface of the ground, the slope of the observed gravity anomaly versus elevation curves reverses sign at an elevation of about 170 ft for the campus buildings and about 350 ft for the downtown buildings, and is nearly linear without a reversal for the Armstrong Tower. The vertical gradients vary substantially even within short distances. Comparisons of the corrected observed gradients with the theoretical gradients of gravity are made. The anomalous gradient anomalies are positive and are correlated with the positive isostatic surface gravity anomalies. Calibration of gravimeters against the observed vertical gradient of gravity to an accuracy of $\pm 2 \mu\text{gal}$ is definitely feasible provided the gradient is pre-determined to a comparable accuracy by a standard instrument".

- b) SHERIFF R.E. - "Addendum to glossary of terms used in geophysical exploration".
p. 255-256.

318 - REICHENEDER K. - "Betrachtungen zu gegeneinander schwingenden Reversionspendeln".
Geod. Inst. Potsdam, Vermessung. 16 Jg, H.11, S.404-406, 1968.

319 - STANGE L. - "Aufgaben und Möglichkeiten der Satellitengeodäsie".
UMSCHAU, Wissenschaft. & Technik, Geod. Inst. Potsdam, N°20, S.630,
Frankfurt, 1968.

- 320 - WIRTH H. - "Systematische Aufzeichnungsfehler bei Erdgezeiten-Registrieranlagen mit Gravimetern und Galvanometern".
Gerl. Beit. Geophys. n°77, H.5, S.379-384, Leipzig, 1968.

"For an earthtide-recording equipment composed of Askania Gs 12 gravity meter and a galvanometer, the systematic errors of the recorded amplitudes and phases are studied. With the dates of a special equipment for semidiurnal resp. diurnal tides follow relative errors in amplitude of - 0.15 % resp. - 0.04 % and phase lags of - 3.2° resp. - 1.6°".

- 321 - HILGER F. - "Gravimetrische Lotabweichungen auf den Stationen Sindlingen, Mainflingen und Homberg".
D.G.K., Reihe B, Angew. Geod. H.161, 37 S, Frankfurt, 1968.

"On a calculé les déviations de la verticale gravimétriques pour les stations de Sindlingen, Mainflingen et Homberg en se basant sur les anomalies à l'air libre. La précision des valeurs calculées a été estimée. L'intégration des formules de Vening Meinesz s'effectue sur toute la surface de la terre à l'aide de gabarits sous forme d'anneaux circulaires. Enfin, l'auteur compare les déviations de la verticale gravimétriques aux déviations de la verticale astro-géodésiques correspondantes".

- 322 - RODDE A. - "Simultanbestimmungen der Lotabweichungskomponenten ξ und η mit dem Prismenastrolabium (VII)".
D.G.K., Reihe B, Angew. Geod. H.163, 85 S., Frankfurt, 1969.

"In this article the author reports on astronomical determinations performed in 1965 on 22 first-order triangulation stations in the north and west of the West German part of the European Triangulation Net and informs on the components ξ and η of the deviations of the vertical he obtained".

- 323 - LERBS L., L. SASS & A. STANGE. - "Bibliographie der Mitarbeiter des Geodätischen Instituts, 1861 - 1967".
D. Akad. Wissensch. Berlin, Geod. Inst. Potsdam, n°22, 148 S., 1968.

"The publications of the collaborators of the Geodetic Institute Potsdam (till 1892 in Berlin) which they edited during their activity at the Institute appear in the aggregate in a chronologically arranged main part, secondly in an alphabetical author's index, and moreover in an index of subjects treated for the years 1861 - 1967".

- 326 - SIMON D. - "Beiträge zur Korrektur von klinometrischen und gravimetrischen Gezeitenregistrierungen".
D. Akad. Wissensch., Geod. Geoph. Veröff., R.IV, H.13, 110 S., Berlin, 1969.
- 327 - DEUTSCHEN GEODATISCHEN KOMMISSION - Nachtrag zum Verzeichnis der Veröffentlichungen im Rahmen - Stand Januar 1969.
Reihe A : Theoretische Geodäsie, 1 S.
Reihe B : Angew. Geod., 3 S.
Reihe C : Dissertationen, 3 S.
Reihe D : Tafelwerke, 1 S.
- 331 - MELCHIOR P. - "De l'astronomie de position à la géodésie spatiale et à la géodynamique".
from : Ciel & Terre, v. LXXXIV, n°9-10.
Obs. R. Belgique, Comm. Sér. B, n°34, Sér. Géophys. n°87, 39 p., Bruxelles, 1968.
- 332 - MATHER R.S. - "The formula for normal gravity in geodetic calculations".
Survey Review n° 150, v.XIX, p. 341-348, Kensington, 1968.
"The geodetic implications of changing the parameters of the reference system defining the formula for normal gravity are investigated with special reference to the adoption of the gravity formula 1967 in place of the international gravity formula
- 333 - MELCHIOR P. - Marées terrestres.
Bull. Inf. n° 53, p. 2489-2544, Bruxelles, 1969.
- 334 - MELCHIOR P. - Marées terrestres.
Bull. Inf. n° 54, p. 2545-2608, Bruxelles, 1969.
- 336 - AFCRL-69-0113, Rep. n° 121,
Final Rep. Nov. 1, 1965 to Dec. 31, 1968, Columbus, 1969.
a) UOTILA U.A. - "Research into the Earth's external gravity field and the determination of geodetic parameters dependent on gravity".
p. 1-32.

"This is a final report on research done under Contract AF19 (628)-5701. The research in twenty-seven technical reports, numerous scientific papers, internal memorandums, dissertations and theses has been summarized and evaluated, keeping in mind the objectives of the Contract. Continuation of the work in the subject matter is discussed".

- b) MORITZ H. - "On the computation of the deflection of the vertical".
p. 33-40.

"If the correction term for the gradient solution is computed from topography only, the deflection of the vertical so obtained will be strictly equivalent to the result of applying Vening Meinesz' formulas to the free-air anomalies modified by adding the terrain correction. A direct proof of this equivalence is given".

- 337 - MATHER R.S. - "The free air geoid for Australia from gravity data available in 1968".
UNISURV. Rep. n°13, 35 p, Kensington, 1969.

"A free air geoid which is the co-geoid obtained by the use of free air anomalies in Stokes' integral, is computed for Australia from available gravity data. For the outer zones the anomalies had been obtained previously using a combined solution from satellite data and terrestrial gravimetry. The solutions for the free air geoid so obtained are compared with the astrogeodetic determination of the geoid on the Australian Geodetic Datum by Fischer and Slutsky and the accuracy of the comparisons is estimated".

- 338 - COMOLET-TIRMAN - "Rapport sur l'étude du gravimètre marin Askania S.SS2n°15".
Serv. Hydro. Marine, 120 p, Paris, 1967.

- 339 - GARLAND G.D. - Chronique de l'U.G.G.I.
n° 75, p. 49-112, 1969.

- 340 - ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY - The geophysical Journal,
v. 17, n° 4, p. 353-455, 1969.

341 - ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY - The quarterly Journal.
v. 10, n°2, p. 77-167, 1969.

342 - GARLAND G.D. - Chronique de l'U.G.G.I.
n° 74, 48 p, 1969.

346 - TOMODA Y. & J. SEGAWA. - "Gravity measurement at sea in the regions : Eastern part of the Indian Ocean, Off Java and Sumatra, Strait of Malacca, South China Sea, Bashi Channel, East China Sea, Off Southern coast of Kyushu".
Ocean. Res. Inst., J. Tokyo Univ., Fisheries, v. 8, n°2, p. 107-131, 1966.

347 - TOMODA Y. - "Geophysical works of the UMITAKA MARU in the Southern Sea 1964-65".
Ocean Res. Inst., J. Tokyo Univ., Fisheries, v. 9, n°1, p. 5-11, 1968.

348 - SEGAWA J. - "Measurement of gravity at sea around Japan (1967)"
Off South Western part of Japan and East China Sea".
Ocean Res. Inst., Univ. Tokyo, p. 53-65, 1968.

350 - BJERHAMMAR A. - "Theory of a new geoid".
A.I.G., Bull. Géod. n°92, p. 173-203, 1969.

"In the simplest approach to geodesy purely geometrical quantities can be used for a description of the figure of the Earth. However, in modern geodesy most interest has been devoted to the study of the potential field of the Earth. In this study "the geoid" is one of the fundamental concepts. It is strange to find that many different kinds of geoids are used without distinguishing between the basic differences and it is also confusing to find that different geoids are superimposed or linked together without an adequate definition of the principal differences. We are now going to discuss some of these geoids".

351 - GEMAEL C. - "Topographic, isostatic reduction maps for the Hayford zones 18-1, Pratt-Hayford and Airy - Heiskanen systems".
Bol. Univ. Federal Parana, Geod. n°11, 4 p, Curitiba, 1969.

"Topographic-isostatic reduction maps for a small Brazilian region for the numbered zones 18-1 in the Airy-Heiskanen ($T = 20, 30, 40$ km) and Pratt-Hayford systems are presented. The corrections are expressed in milligals and are to be added to the observed values of g . The computation points are spaced $60'$ and in some cases $30'$ only".

- 352 - HAGIWARA Y. - "Analyses of gravity values in Japan".
Earthquake Res. Inst., Bull. v.45, p. 1091-1228, 1967.

"Gravity values in Japan as obtained by the Geographical Survey Institute are analyzed from various standpoints. As large parts of Japan are occupied by mountainous areas, it is clear that terrain correction must be made in order to accurately obtain the Bouguer anomaly distribution in Japan. Topographic heights of Japan Islands and depths of the adjacent sea are first of all digitalized on punched cards. The data thus provided are subsequently used for the actual computation of terrain correction on a digital computer. Number of the data amounts to 160.000. Computation of terrain correction is made at the 12.000 gravity stations established by the Geographical Survey Institute. It is found that the statistical distributions of topographic heights above sea-level and of terrain correction values can generally be approximated by exponential curves. The highest correction value obtained reaches about 24 mgal. A terrain-corrected Bouguer anomaly map is drawn, and gravity-topography and geology relations are discussed..."

Since it is hard to calculate free-air anomaly directly from the gravity data over a mountainous area, the value of the Bouguer anomaly together with topographic elevation are read at a grid point of meshes covering the map, and then the free-air anomaly distribution is obtained. A method of free-air reduction to an equipotential surface above the geoid is also advanced by the author.

In the last half of this paper, the author deals with geodetical problems such as determination of the Earth's flattening and computation of the vertical deflection from the gravity distribution obtained. The gravimetric deflections at stations, where astrogeodetic deflections have been observed by the Geographical Survey Institute, are calculated from the distribution of the free-air anomaly and from that of the Bouguer anomaly to which terrain corrections for the vertical deflection are added. Furthermore, undulation of the geoid is estimated.

The conclusions reached are briefly given in the following :
1) The flattening as obtained in this paper ranges from $1/243.5$ to $1/310.0$. It is difficult to determine the flattening from gravity values in Japan because of the narrow latitude range occupied by Japan. Nevertheless, $1/303.1$ seems likely to be the most reliable value among these flattenings, because it is derived from the free-air data.

- 2) The optimum components of the vertical deflection at the Tokyo datum station are estimated as $\xi_0 = -11''.06$ and $\eta_0 = 7''.77$, which are consistent with the deflection values previously obtained by many other authors.
 3) The amplitude of the geoidal undulation amounts to several meters and the highest of the geoid reaches about 7 meters above the level of the reference ellipsoid".

353 - TOMODA Y. - "Continuous measurement of gravity and magnetic force in the 4th Southern Sea Expedition of the Umitaka-Maru".
 La Mer, Bull. Soc. Franco-Japonaise Océan., t.5, n°3, p.175-205, 1967.

"Les mesures continues gravimétrique, géomagnétique et bathymétrique ont été faites au cours de la 4ème expédition de l'Umitaka-Maru dans l'Océan Antarctique. L'installation d'un petit calculateur électronique à bord fonctionnant avec le gravimètre a permis d'obtenir immédiatement le résultat gravimétrique.

Après avoir expliqué la méthode du traitement de l'information de l'accélération de la pesanteur, du magnétisme terrestre et de la profondeur de l'eau, nous avons montré la relation entre les trois quantités : anomalie à l'air libre de l'accélération de la pesanteur, anomalie locale de la force totale magnétique et la topographie du fond".

354 - TOMODA Y. & J. SEGAWA. - "Measurement of gravity and total magnetic force in the sea near and around Japan (1966)".
 Ocean Res. Inst., Univ. Tokyo, p. 157-164, 1967.

"Measurements of gravity and total magnetic force at sea was carried out on board the Uritaka-Maru off Sanriku district and around Hokkaido district in the period between July - Aug. 1966. The results are summarized as follows :

- 1) There are zones of conspicuous negative Bouguer gravity anomaly between Kushiro and Cape Erimo and between Cape Erimo and Muroran.
- 2) Bouguer gravity anomaly at Tsugaru straits is about + 100 mgals and the values are not so different compared with those estimated from the land values.
- 3) Free air gravity anomaly in the Japan sea between Hokkaido and east coast of Siberia is about + 25 mgals.
- 4) Negative free air gravity anomaly near Wakkanai seems not to extend to Rebun Island.
- 5) The maximum positive Bouguer gravity anomaly on the continental shelf off Sanriku district is + 200 mgals at off Ōfunato.
- 6) There was found small negative Bouguer anomaly at the region 10-20 miles off Chōshi".

- 355 - GEOGRAPHICAL SURVEY INSTITUTE - "Gravity survey in Japan - VI : Gravity survey in the Kyushu district".
Bull., v.XIV, Part 2, 82 p, Tokyo, 1969.

"Geographical Survey Institute has carried out the 2nd order gravity survey for the purpose of clarifying the detailed gravity distribution of whole land of Japan. The survey was started in the Hokkaido district on July, 1952 and the first round survey of all Japan was completed when the gravity stations in the Kyūshū district were occupied on December, 1960. The second round survey is in progress. The whole gravity networks in Japan were divided into six districts, each block having one pendulum station except the Shikoku district. The results of gravity survey in the Hokkaido, Tōhoku, Kantō Chūbu, Chūbu Kinki Chūgoku, Shikoku districts were already published. The present report gives the results of gravity survey in the Kyūshū district".

- 356 - GIBB R.A., J.J.G.M. Van BOECKEL & R.W. HORNAL. - "A preliminary analysis of the gravity anomaly field in the Timmins-Senneterre mining areas".
Grav. Map Ser., Dom. Obs., 25 p, Ottawa, 1969.

"The results of gravity surveys made by the Dominion Observatory during the period 1946 to 1963, in the Timmins-Senneterre mining area of Ontario and Quebec are presented as a Bouguer anomaly map (scale : 1/500.000°). The area is studded with many granite batholiths of variable composition which are outlined by intense negative gravity anomalies. The whole region is regarded as one great roof pendant and on the assumption that the volcanic and sedimentary rocks of the area are everywhere floored by granite, it is possible to estimate the thicknesses of the volcanic belts using the gravity results ; however, the depths to which the granite extends cannot be determined by the gravity method alone. A preliminary interpretation using two -and three dimensional models to simulate major geological bodies indicates that many of the dense volcanic belts in the area extend to depths of from 3 to 5 km."

- 357 - PICKLYK D.D. - "A regional gravity survey of Devon and Southern Ellesmere Islands - Canadian Arctic Archipelago with map n°87".
Grav. Map Ser., Dom. Obs., 10 p, Ottawa, 1969.

"During the summer of 1967, a Dominion Observatory field party in co-operation with the Polar Continental Shelf Project made a regional gravity survey of Devon Island east of longitude 89° W and southern Ellesmere Island east of longitude 88° W. Baumann Fiord in the west and Makinson inlet in the east mark the northern limits of the survey of Ellesmere Island.

Stations were also established on Coburg Island and Philpotts Island. Some 463 stations were occupied during the survey which was part of the Observatory's continuing program to map the Arctic Islands.

The results of the survey are presented as a Bouguer anomaly map (in pocket) at a scale of 1/500,000°. Some earlier results obtained by the Observatory in 1961 and 1962 (Sobczak, et al., 1963) are incorporated in the map.

Prior to the gravity surveys little geophysical work had been done in this area. Hyndman (1965) has published the results of gravity measurements over the Devon Ice Cap which were tied to the Observatory base network. The results of some aeromagnetic and radiometric flight lines across the area have been reported by Gregory, et al. (1961). Barrett (1966) made a shipborne magnetometer survey of Lancaster Sound between Devon Island and Baffin Island".

- 358 - TOMODA Y., K. OZAWA & J. SEGAWA. - "Measurement of gravity and magnetic field on board a cruising vessel".
Bull. Ocean Res. Inst., Univ. Tokyo, n°3, 168 p, 1968.

"A ship-borne gravity meter was tested to obtain continuous gravity measurements on board a moving vessel. A short-period bifilar gravity pendulum mounted on a long-period gimbal suspension was made and tested in 1951-1960. But no successful results could be obtained with it.

A string gravity meter mounted on a vertical gyroscope was tested from 1960 to 1964. The first measurement was carried out in Sagami Bay in 1961. Measurements in the northern part of the Philippine Basin south of the Honshū district were carried out in 1961, using a gravity meter, which was a prototype of the T.S.S.G. (Tokyo Surface Ship Gravity Meter). The T.S.S.G. model 62 was constructed in 1962 and was used for the Indian Ocean Expedition in 1963-1964. In the Indian Ocean Expedition measurements were carried out on board the "Umitaka-Maru" of the Tokyo University of Fisheries, from Fremantle, Australia to Shibusaki Bay in Kyūshū, Japan. The measured areas are the eastern part of the Indian Ocean, off Java and Sumatra, the Strait of Malacca, the South China Sea, Bashi Channel, and the East China Sea.

In the 3rd Southern Sea Expedition of the Umitaka-Maru, the gravity was measured in the Southern Sea between 40°S and 70°S and between 131°E and 150°W. The ship cruised from Melbourne south to the continental shelf of Antarctica, passing through the South East Indian Ridge, from Antarctica to Wellington, New Zealand along the Macquarie Ridge, from Wellington south to 70°S passing through the Pacific Antarctic ridge, and along the coast of the Antarctic continent between 132°E and 150°W, measuring around Scott and Balleny Islands. In both expeditions, about 5,000 points of gravity were determined with enough accuracy to be used.

Measurements of the total magnetic force, using a proton magnetometer, were carried out simultaneously with the gravity measurements in both expeditions. The proton magnetometer worked whenever the ship Umitaka-Maru cruised in both expeditions. In addition to the magnetic survey of the Umitaka-Maru, the total magnetic force was measured near and around Japan by the Tansei-Maru of the Ocean Research Institute of the University of Tokyo. In the Northern part of the Philippine Basin and along the Izu Mariana Island Arc, measurements were taken enough to make a magnetic contour map.

Throughout the measurement, almost all the bottom topography whose wave length is less than 20 to 50 miles is reflected in the free air gravity anomalies, suggesting that isostatic equilibrium is imperfect. The only exception is a rise near Cocos Island in the Indian Ocean. In the mid-oceanic ridge, the free air gravity anomaly in the crest province of the Southeast Indian ridge is about 80 mgals higher than that of the basin between the ridge and the Antarctic continent. This feature, however, cannot be seen in the Pacific antarctic ridge. The negative free air gravity anomalies north west of the Ross sea seem to agree with the results of Satellite investigations, which show that the Geoid is about 40 m. lower than the standard Geoid.

The free air gravity anomalies in the basin fluctuate in spite of the flat bottom topography, being influenced by the supposedly irregular subbottom ; the undulation of the subbottom is thought to be 500 to 1000 m. The subbottom irregularity can be determined more easily by the use of the gravity meter than by use of the gravity meter than by the use of the seismic profiler.

Generally, local magnetic anomalies of 200-500 γ are observed in the Oceanic basin where the Bouguer gravity anomalies are larger than 200 mgals. The wave lengths of the local magnetic anomalies are 5-20 miles, and the trend of the anomalies usually coincides with the trend of the bottom topography. The local magnetic anomalies disappear suddenly at the continental margin, where the granitic layer becomes thick, and it is thought that the local magnetic anomalies originate at the surface of the Basaltic layer.

There are large magnetic anomalies on the flat basin near the flank province of the Mid Oceanic Ridge. The magnitude of the anomalies should be greater than that of the anomalies in the crest province of the ridge if we take into account the attenuation caused by the depth, which depends on the wave length of the anomalies".

338 - WORLD DATA CENTER A. - Gravity - Tsunami - Seismology - Longitude & Latitude Meteorology.

Catalogue of Data received by W.D.C.A, during the period 1 July 1957 - 31 December 1968, 57 p, Washington, 1969.

339 - FLICK J. & P. MELCHIOR. - "Résultats des observations de marées terrestres dans les trois composantes au Grand-Duché de Luxembourg".
from : Bull. Cl. Sci. n°10, p. 1214-1220, Bruxelles.
Obs. R. Belgique, Comm. Ser. B, n°39, Ser. Geophys. n° 91, 1968.

340 - MELCHIOR P. & P. PAQUET. - "Les constantes des marées océaniques au Port d'Ostende de 1882 à 1964".
from : Bull. Cl. Sci. n°10, p. 1222-1223, Bruxelles.
Obs. R. Belgique, Comm. Ser. B, n°38, Ser. Geophys. n° 90, 1968.

342 - INSTITUTE of GEODESY & CARTOGRAPHY - Proc., t. XVI, n°1 (37), 129 p, Warszawa, 1969.

343 - COMITE GEODESIQUE POLONAIS - Akad. Nauk., Geod. Kart., t. XVIII, n°2, p. 93-192, Warszawa, 1969.

344 - WEICHERT D.H. - "Upper mantle structure under the Churchill Province of the Canadian Shield, east of the Yellowknife seismic array".
from : J. Phys. Earth, v. XVI, p. 93-101.
Contr. Dom. Obs., n° 254, Ottawa, 1968.

"A series of chemical explosions in Hudson Bay in 1965 has been studied using array techniques on the recordings at the Yellowknife seismic array. An upper mantle velocity model valid for the Churchill Province of the Canadian Shield has been derived, using the Wiechert-Herglotz method for the upper layers. A strong velocity gradient is required for the first 150 km under the Mohorovicic discontinuity, underlain by a weak P-wave low velocity layer. Comparison with array results from the 1966 Early Rise shots in Lake Superior strongly suggests significant P-velocity differences in the upper mantle under the different provinces of the Canadian Precambrian Shield".

345 - MATHER R.S. - "Verification of geoidal solutions by the adjustment of control networks using geocentric cartesian co-ordinate systems".
UNISURV., Rep. n°14, 40 p, Kensington, 1969.

"The simultaneous adjustment of a horizontal control network, together with astronomical observations and the geoid spheroid separation vector, using a geocentric cartesian system as a reference frame is investigated and formulae are derived for the complete definition of the solution.

The precision required for each of the quantities involved in the adjustment is assessed and a relation established between parameters obtained in the adjustment and systematic errors in the geoidal solution. A method is outlined for the study of these position dependent errors in the geoidal solution in which the distant zones are represented by the gravity anomaly values established by a combined solution using satellite data and surface gravimetry".

- 346 - HEITZ S. - "Eine astronomisch-geodätische Geoidbestimmung für Westdeutschland".

D.G.K., Reihe B : Angew. Geod., H.167, 58 S, Frankfurt, 1969.

"When in 1968 astronomical observations of longitude and latitude were available for a very great number of the West German primary triangulation stations, it suggested itself that one began with a new astronomic-geodetic determination of the geoid for West-Germany. For this purpose one started from an interpolation according to the least-square method for the undulations of the geoid h with the linear set-up :

$$h_j' = \sum_{j=1}^n a_{j'} j h_j$$

for the autocorrelation, and the condition :

$$\sum_{j=1}^n h_j = 0$$

P_j = n source points with known deflections of the vertical, P_j ,
 P_j = test points.

For the covariance function K_{jk} of the geoidal heights h_j , h_k , where K_{jk} has to be determined empirically, it has been assumed that this function only depends on the square of the distance s_{jk} of the points P_j , P_k under consideration. When b_{jk} is the inverse matrix of the covariance matrix K_{jk} of the source points, we obtain the coefficients $a_{j'j}$:

$$a_{j'j} = \sum_{k=1}^n b_{jk} h_k K_{kj'}$$

The heights h_j of the source points - at first unknown values - have been determined by an adjustment by means of the method of variation of coordinates, where the weighted sum of squares of the corrections of the components of the deflection of the vertical is made a minimum. In order to obtain the most uniform distribution of the source points,

the components of the deflection of the vertical for the primary triangulation points, which had not yet been observed, have been determined by interpolation. We attributed the weight of 0.2 to the latter points, whereas the weight of 1 has been assigned to the observed points. The computations have been performed with 225 source points".

- 348 - MELCHIOR P. & L. SKALSKY. - "Station : PRIBRAM/BELG., mesur s faites dans les composantes Nord-Sud et Est-Ouest avec les pendules horizontaux VM n°76 et n°77 en 1966, 1967 et 1968".
Obs. R. Belgique, Bull. Obs. Marées Terrestres, v. III, fasc. IV, 69 p, Bruxelles, 1968.

"La station Pribram/Belg. est le fruit d'une coopération entre l'Observatoire Royal de Belgique et l'Institut de Géophysique de Prague.

La présente publication ne vise pas à décrire les buts de cette coopération mais à donner tous les résultats qui ont été obtenus afin de permettre une analyse approfondie et une comparaison avec d'autres mesures analogues.

La station est équipée de deux pendules horizontaux en quartz de Verbaandert-Melchior, n°76 et n°77, pourvus d'un système d'étalonnage automatique programmé par crapaudines dilatables (crap. n°47 et n°48). les crapaudines ont été préalablement étalonnées interférométriquement par rapport à la raie verte du mercure.

Les pendules sont placés sur des barres d'acier inoxydable scellées à l'aide d'un dérivé phénolique dans le fond de niches creusées dans la paroi rocheuse.

La station a été installée en 1965 par MM. Melchior et Wandewinkel. Cependant, l'excavation des niches venant à peine d'être terminée, il s'est produit un flambage important dû à la très haute pression à laquelle est soumise la roche à la profondeur de 1300 mètres. Il en est normalement résulté une dérive réelle des pendules qui a empêché la mise en exploitation de la station avant le mois d'avril 1966. A cette époque la dérive est devenue faible c'est-à-dire, de l'ordre de 5 millimètres par jour sur le papier enregistreur et la station a fonctionné régulièrement.

Les dérives exprimées en millisecondes d'arc par jour ($0''001/j$) sont données dans la Table 1 pour chaque intervalle ininterrompu de mesures".

- 351 - GARLAND G.D. - Chronique de l'U.G.G.I.
n° 77, p. 161-224, Paris, 1969.

- 352 - Hristov V. - "Proposal by the Bulgarian National Committee on Geodesy & Geophysics for a specification of the geodetic reference system 1967". Acad. Sci., Nat. Com. Geod. & Geophys., 29 p, Sofia, 1969

- 354 - BURSA M. - "On the determination of parameters of the Earth's figure from satellite orbit dynamics".
 Res. Inst. Geof., Symposium on Dynamics of Satellites, Prague,
 May 11-24, 20 p, 1969.

- 355 - RAPP H.R. - "Further studies in the combination of gravimetric and satellite data".
 AFCRL-69-0249, Rep. n°119, Sci. Rep. n°27, 36 p, 1968.

"This report is composed of two portions. The first is a general theoretical discussion of the problem of assuming compatibility of surface gravity data and potential coefficients derived from satellite orbital analysis. The second part of the report describes a combination of gravimetric and satellite data using $5^\circ \times 5^\circ$ mean free air anomalies supplied by the Aeronautical Chart and Information Center, and a set of potential coefficients designated NWL 81 derived by Anderle. Several methods were applied to this data to obtain an adjusted set of potential coefficients complete to $n = 15$ plus an additional number of higher degree resonance terms. In addition three sets of adjusted $5^\circ \times 5^\circ$ mean free air anomalies were obtained. From these anomalies a set of potential coefficients complete to $n = 30$ was derived by the development formulas. Analysis of the various solutions indicated that one was to be preferred over all others. Problems continue to remain with respect to proper weighting of the data".

- 357 - BERNSTEIN R. & C.O. BOWIN. - "Real-time digital computer acquisition and computation of gravity data at sea".
 W.H.O.I., IEEE Transactions on Geosciences Electronics,
 Contr. n°1401, 10 p, 1963.

"A system for the automatic acquisition and computation of gravity data at sea has been tested and is now operational aboard the Research Vessel Chain of the Woods Hole Oceanographic Institution. This is the first recorded instance of on-line acquisition and processing of gravity data by the use of a digital computing system. Sampling and computation are performed in a one minute computation cycle making knowledge of gravity values, gravity anomalies and dead-reckoning position available in real-time.

This system consists of a LaCoste-Romberg sea gravity meter, data conversion units for computer compatibility with the gravity meter ship's gyrocompass and ship's speed log, an IBM 1710 Mod 1 Control System (the combination of a 1620 Computer and a 1711 Data converter for analog to digital conversion), and typewriter and paper tape input-output units".

358 - BOWIN C.O. - "Supplementary report on the automatic gravity data used aboard R/V Chain, July 1962, September 1963".
W.H.O.I., Rep. n°63-40, 89 p, 1963.

359 - BOWIN C.O. - "Five years experience with a shipboard oceanographic data processing system : hindsight and foresight".
from : Proc. 4th U.S. Naval Symposium on Military Oceanography.
W.H.O.I., Contr. n°1937, p. 253-264, 1967.

360 - BOWIN C.O., R. BERNSTEIN E.D. UNGAR & J.R. MADIGAN. - "A shipboard oceanographic data processing and control system".
IEEE, Transactions on Geoscience Electronics, v.GE-5, n°2, p.41-50, 1967.

"In June of 1962 a digital computer (IBM 1710) was placed aboard the Research Vessel Chain of the Woods Hole Oceanographic Institution. This system has made it possible to automatically sample, compute, and record the ship's heading and speed, latitude and longitude, water depth, gravity in terms of total acceleration, free-air and Bouguer anomalies, and the magnetic field of the Earth. The system was expanded in November, 1963, to provide online plotting of bathymetric, gravity anomaly, and magnetic field profiles ; computer control of gravity meter spring tension ; processing of ocean surface temperature and sound velocity measurements ; reduction of Loran C and VLF radio navigation data to latitude and longitude ; display of ship's position and numerical data at remote stations aboard the ship ; and malfunction detection and alarm message generation.

Three magnetic-disk storage units are used for data and program storage and provide the ability to merge real-time on-line computations with background off-line computations (time-sharing). Experiments are being made using three input/output typewriters at remote locations on the ship. The advantages of a shipboard system are described".

361 - BOWIN C.O., C.G. WING & T.C. ALDRICH. - "Test of the MIT vibrating string gravimeter, 1967".
from : J. Geophys. Res., v.74, n°12.
W.H.O.I., Contr. n°2246, p. 3278-3280, 1969.

"The prototype MIT vibrating string accelerometer (VSA) gravimeter system was used by the Woods Hole Oceanographic Institution during three cruises of the R.V. Chain in 1967. This meter was operated simultaneously with a gimbal-mounted LaCoste and Romberg sea gravity

meter (S-13) for a total of 14 weeks. The port-to-port drift observations appear to be less reliable than the drift rate determined from a comparison of free-air anomalies calculated independently for the two meters. The drift-corrected free-air anomaly values at crossings of ship tracks are compared. The mean difference of the six crossings with the S-13 meter is 11.6 mgal with a standard deviation of 8.7 mgal. For the seven crossings using only the VSA meter, the mean is 1.6 mgal with a standard deviation of 0.8 mgal".

- 362 - HEITZ S. - "Geoidbestimmung durch Interpolation nach kleinsten Quadraten aufgrund gemessener und interpolierter Lotabweichungen".
D.G.K., Reihe C : Dissert. H.124, 38 S., Frankfurt, 1968.

"L'auteur décrit les possibilités d'interpoler les déviations de la verticale pour appliquer, après cela "l'interpolation par les moindres carrés" (en anglais : least squares prediction) à la détermination du géoïde à l'aide de déviations de la verticale. Ce faisant on part d'une disposition linéaire de l'autocorrélation des altitudes du géoïde. En ce qui concerne la fonction de covariance des altitudes du géoïde on a supposé que celle-ci ne dépend que du carré de la distance. La détermination des coefficients de la fonction linéaire d'autocorrélation s'effectue à l'aide de la compensation par la méthode des moindres carrés, où on rend minimum la somme carrée pondérée des corrections des déviations de la verticale".

- 364 - LEVALLOIS J.J. - "Sur le système géodésique de référence 1967".
A.I.G., Symposium de Paris, 8 p, 1969.

- 365 - INSTITUT GEOGRAPHIQUE NATIONAL. - Ellipsoïde de référence 1967,
table des éléments.
11 p, Paris, 1969.

- 366 - ASSOCIATION INTERNATIONALE DE GEODESIE. - Ellipsoïde 1967, méthode
des développements en série.
3 p, Paris, 1969.

- 367 - LEFEBVRE M. - "Etude comparative des différents résultats obtenus en
géodésie spatiale sur le réseau européen".
C.N.E.S., Symposium sur la triangulation spatiale européenne,
16 p, Paris, 1969.

- 368 - CHASSAING J.P. - "Campagne diadème, résultats obtenus en Géodésie semi-dynamique à l'aide de mesures Doppler".
C.N.E.S., Symposium sur la triangulation spatiale européenne,
15 p, Paris, 1969.

- 370 - BOWIN C.O., W.D. NICHOLS, T.C. ALDRICH, E.F. BUGAN, G.N. RUPPERT & J.B. ZWILLING. - "Second supplementary report on the oceanographic shipboard data processing and control system (ODPCS) aboard the research vessel chain, October 1963 to December 1966".
W.H.O.I., Rep. n°67-26, 175 p, 1967.

"In November 1963, the Shipboard Oceanographic Data Processing and Control System aboard the R/V Chain was improved and expanded by increasing the size of core memory, introducing control capability, increasing the number and variety of inputs, providing on-line plotting, improving the input-output capability of the computer, and adding a computerized logging system. The intent of this report is to supplement a published article (A shipboard oceanographic data processing and control system by Bowin, Bernstein, Ungar, & Madigan, IEEE Transactions of Geoscience Electronics, in press) by providing more detailed information on the development and documentation of the system than can be given in the published paper".

- 371 - BOWIN C.O. & T.C. ALDRICH. - "Gravity data obtained during chain cruise #70".
W.H.O.I., Rep. n°69-6, 25 p, 1969.

"Profiles, tabulations, and charts are presented of principal gravity facts, free-air gravity anomalies, and simple Bouguer gravity anomalies obtained in the western North Atlantic Ocean during R/V Chain cruise 70".

- 372 - BOWIN C.O. - "Gravity over trenches and rifts".
from : Int. Upper Mantle Proj., Cont. Margins & Islands Arcs,
Rep. Symposium, Ottawa, GSC paper 66-15.
W.H.O.I., Contr. n°1730, p. 430-439, 1966.

"Mid-Ocean ridges and the deep trenches are the most prominent features of the ocean basins, and both have been explained by investigators as resulting from convection in the mantle. Some aspects of these interpretations are examined. The ridges are in nearly isostatic equilibrium (free-air anomaly values are generally less than 50 mgal), but the trenches have very large negative free-air anomaly values and are considerably out of isostatic equilibrium .

The Puerto Rico Trench has the largest free-air anomaly so far measured on the Earth's surface (-380 mgal). A comparison of the Gulf of Aqaba, the East African Rifts, the Red Sea, the Gulf of California, and the Cayman Trough is made. Assuming a tensional origin for these features, it is concluded that between 40 and 100 kilometres of separation appear to be necessary before dense substratum begins to rise upward beneath the trough or rift".

- 373 - Van ANDEL T.H. & C.O. BOWIN. - "Mid-Atlantic ridge between 22° and 23° North latitude and the tectonics of Mid-Ocean rises".
J. Geophys. Res., v.73, n°4, p. 1279-1298, 1968.

"A detailed geological and geophysical study of the crest and upper western flank of the mid-Atlantic ridge between 22° and 23°N and 44°30' to 46°20'W reveals that :

- 1) Several markedly different physiographic zones parallel the ridge axis, but only the crest shows strong topographic linearity.
- 2) Metamorphosed basalts exposed on the flanks of the median valley indicate regional metamorphism of the lower part of a gradually thickening crust, followed by uplift and tectonic displacement of the overburden.
- 3) The distribution of sediments and sediment ages suggest that the relief of the upper flank is late Miocene and the crestal relief is Quaternary.
- 4) The small free-air gravity anomalies over the ridge indicate that the ridge is nearly in isostatic equilibrium. Topography accounts for most of these anomalies. The slope of the regional Bouguer anomaly curve gradually increases toward the ridge crest, indicating a decreasing depth of compensation or an increasing slope of the boundary of the material providing the mass deficit or both toward the crest.
- 5) Magnetic profiles can be interpreted by the sea-floor spreading hypothesis, and they give a spreading rate of 1.4 cm/year for the crestal part of the ridge. The mid-Atlantic ridge and some other rises are characterized by high relief with a well developed median valley, a thick crust, exposures of greenstones and peridotites, and a slow spreading rate. Others, most notably the East Pacific rise, have a fairly smooth relief and a thin crust, lack a median valley and greenstone and peridotite exposures, and spread much more rapidly. The large topographic differences probably indicate behavioral differences of only the shallow levels of the crust and upper mantle. The thickness of the material that deforms by brittle fracture may determine the behavior of the surficial rocks and hence the topography. Material that deforms by brittle fracture may be thin at sites of fast spreading because higher rock temperatures might occur at shallower depths. This may account for the correlation of rifting and greater topography where spreading rates are less than 2.0 to 2.5 cm/year and the occurrence of less extensive surficial structural rearrangement where spreading rates exceed these values".

- 374 - BOWIN C.O. - "Geophysical study of the Cayman trough".
J. Geophys. Res., v.73, n°16, p. 5159-5173, 1968.

"The deepest water and the shallowest depths to mantle within the Caribbean Sea south of the Caribbean Island arc occur in the Cayman (or Bartlett) trough. The thin crust, indicated by the seismic refraction studies and by gravity data, suggests that the trough is a feature produced by extension with concomitant upwelling of dense mantle material to more shallow depths. During cruises of the R.V. Chain in 1965 we investigated the Cayman trough, utilizing continuous bathymetric, gravity and magnetic measurements. These investigations confirm that in addition to the Bartlett and Oriente deeps, which occur south of the Cayman Islands and Cuba, respectively, there is a depression about 5700 meters deep on the south side of the Cayman trough west of $79^{\circ}30'W$. Negative free-air gravity anomaly values occur over the deeps of the Cayman trough and computed structure models show that there are mass deficiencies beneath the deeps and mass excesses beneath the adjacent ridges. The deeps and adjacent ridges are not in isostatic equilibrium, and it appears that the rising of portions of the crust is here a concomitant aspect of the sinking of adjacent portions of the crust. The width of the individual structures that are out of isostatic equilibrium is about 40 km. All the gravity profiles show a hump in the Bouguer anomaly curve across the trough. The computed structure model confirms that the rise in the mantle-crust interface extends across the width of the trough and is centered on the axis of the trough. The axis of the Bouguer high clearly does not cross the Windward Passage between Cuba and Haiti but instead curves eastward and enters the Gonave Gulf between the northern and southern peninsulas of Haiti. Steps of about 200 to 400 γ in the magnetic field on the sides of the trough can be traced along almost the entire length of the Cayman trough. These steps generally occur on the southern slope of the Cayman trough and on the northern side of the Cayman ridge. Lithofacies maps of southern Cuba suggest that the initiation of the extension that produced the trough began in the Paleocene or earlier, and studies in Guatemala suggest that extension was active during the Cretaceous. The much slower extension rate and the lack of characteristic central magnetic anomalies suggest that the Cayman trough probably resulted from processes different from the ones producing the world rift system. Rather than a direct manifestation of an upwelled convection cell, the trough may be a tensional feature associated with failure of the crust under conditions of an eastward drift of the Caribbean region. It is suggested that the rift structure is now growing toward the east along the Enriquillo-Cul de Sac trough in southern Hispaniola. It is also concluded that the Cayman trough structure is not a westward continuation of the structure that produces the Puerto Rico trench negative free-air anomaly belt".

- 375 - ROBERTSON P.B. - "La Malbaie structure, Quebec. A palaeozoic meteorite impact site".
 from : Meteoritics, v.4, n°2.
 Contr. Dom. Obs., n°249, 24 p, Ottawa, 1968.

"Evidence in support of an origin by meteorite impact has been found at La Malbaie structure, 105 km northeast of Quebec City on the north shore of the St-Lawrence River. The structure has a central peak (Mont des Eboulements) 2.500 feet (780 meters) above sea level, surrounded by lower hills and a semicircular valley with a diameter of 35 km. The circularity is incomplete as the peripheral valley terminates to the south and east at the St-Lawrence River which obscures an estimated 40 % of the crater. Rocks within the crater comprise charnockitic and granitic gneisses, anorthosite and gabbro of Pre-cambrian Grenville age, and Middle Ordovician limestone.

Autochthonous breccias, mixed breccias, shattercones and microscopic shock deformation in the central uplift rocks provide evidence to support the meteorite impact hypothesis. Detailed study of quartz planar deformation features reveals that shock zones are concentric about Mont des Eboulements with the zone of strongest deformation in the center. In comparison with the range of deformation found in other terrestrial meteorite craters the exposed rocks of the central uplift at La Malbaie are representative of weak to moderate shock zones.

The stratigraphic and tectonic history of the region indicates that the crater originated between late Middle Ordovician and late Devonian times".

- 376 - WORLD DATA CENTER B.1 - Catalogue of publications received by WDC B1 between July and December 1968.
 General periodicals n°20, 26 p, Moscow, 1969.

- 377 - WORLD DATA CENTER B.1 - Catalogue of publications received by WDC B1 between July and December 1968, Seismology, Gravimetry & Geodesy, Upper Mantle & Geology.
 n°20, 43 p, Moscow, 1969.

- 378 - WORLD DATA CENTER B.1 - Six-monthly catalogue of data on seismology and gravity received during the period July 1 - December 31, 1968.
 33 p, Moscow, 1969.

- 379 - Bollettino di Geofisica teorica ed applicata,
 v.XI, n°41-42, 1969.

- a) MORELLI C., M.T. CARROZZO, P. CECCHERIVI, I. FINETTI, X. GANTAR, M. PISANI, P. SCHMIDT di FRIEDBERG. - "Regional geophysical study of the Adriatic Sea (with an appendix by G. GIORGETTI, F. MOSETTI : General morphology of the Adriatic Sea)".
p. 3-56.

"The themes of the 1st C.N.R.'s five-years program (1965-69) for Italian Oceanography include the systematic regional survey of bathymetry, morphology, gravity and magnetism. These measurements are executed by Osservatorio Geofisico Sperimentale, Trieste.

In this first report we begin to present the criteria of preparation and execution of the survey, the characteristics of the ship (Bannock) and of the equipments used, the instrumental modifications introduced the computation and reduction methods developed, the reached accuracies.

Results are then presented for the Adriatic Sea, which are synthetized in two maps in the text and 7 cut-text maps of the principal anomalies.

Developed the interpretation criteria, from gravity anomalies the isobathes of the rigid series below the non-consolidated sediments are obtained, and also indications on the Moho behaviour, starting from experimental seismology results. From the magnetic anomalies, indications are obtained on the features of crystalline top.

Results are interpreted in function of the regional geology and tectonics, and for setting up a schematic picture of the dynamic interpretation along the main transversal sections where also seismic and heat flow data are represented.

In Appendix a morphological map of the Adriatic Sea is presented and discussed. The fundamental structure of this basin, already known in its general outlines from the previously existing cartography, is now described with further details. Nature of the bottom is also discussed".

- b) DRAGASEVIC T. - "Investigation of the structural characteristics of the Mohorovicic discontinuity in the area of Yugoslavia".
p. 57-69.

"The method of investigation and structural characteristics of the Mohorovicic discontinuity are discussed.

Besides consideration of the lithophysical conditions the characteristics of the registered waves are analysed. A structural map of the Mohorovicic discontinuity for the area comprised by the investigated profiles is given. This is consisted with the results of previous gravitational and magnetic surveys".

- c) RAPP R.H. - "Analytical and numerical differences between two methods for the combination of gravimetric and satellite data".
p. 108-118.

"One method for the combination of satellite and gravimetric data consists of a comparison of a potential coefficient found by satellite analysis with the coefficient found by the usual summation process applied to a global estimate of a terrestrial anomaly field. A second method compares and anomaly computed from a set of potential coefficients found from satellite analysis with the observed terrestrial estimate. The specific equations for the adjustment procedure are derived and compared. It is shown that the results for the potential coefficients will only be the same when all anomalies have the same standard errors. Numerical tests were made with both methods by solving for potential coefficients to $n = 14$ and the adjusted $5^\circ \times 5^\circ$ field. Although no conclusive tests were found that indicated one method yields truer coefficients than the other, the second method appears to be preferred when judged by the agreement of anomalies computed from the coefficients with actual terrestrial estimates".

- d) MITWALLI M.A. - "Interpretation of the low gravity anomaly in N.E. Kordofan, Western Sudan".
p. 119-126.

"A gravity survey in the N.E. Kordofan Province in Western Sudan revealed the presence of a large negative anomaly. This anomaly is associated with a rift valley feature, which is postulated to relate with the East African rift pattern.

The total anomaly consist of two main components : one due to infilling sediments of the depression, and the other due to the rifting action on the rocks of the shield. Five profiles are interpreted to calculate the thickness of the sediments ; a model for the rift feature is also presented".

- 380 - ECKER E. & E. MITTERMAYER. - "Gravity corrections for the influence of the atmosphere".

Paper presented at the Joint Symposium of the Comm. of the New Adjustment of European Triangulation and the Comm. of the European Satellite Triangulation Net in Paris, Feb. 1969.
Boll. Geof., teor. appl., v. XI, n° 41-42, p. 70-80, 1969.

"It is shown that the atmospherical potential of a rather general density function can be split into a harmonic and a nonharmonic part. The harmonic part of the atmospherical potential combines with the potential of the solid equipotential ellipsoid to give the potential which is conventionally computed using the total mass, i.e., the mass of the solid earth and the atmosphere. Only the monharmonic part gives rise to atmospherical correction of gravity. Formulas and correction tables for two standard atmospheres are given".

381 - MITTERMAYER E. - "Numerical formulas for the geodetic reference system 1967".

Paper presented at the Joint Symposium of the Comm. of the New Adjustment of European Triangulation and the Comm. of the European Satellite Triangulation Net in Paris, Feb. 1969.

Boll. Geof. teor. appl., v.XI, n°41-42, p. 96-107, 1969.

"Numerical formulas to compute the length of the arc of meridian $s(\varphi)$ and the ellipsoidal latitude $\varphi(s)$ are given for the Geodetic Reference System 1967. Both functions are skewsymmetric and are obtained by an elliptic integral or by a differential equation of first order. They are approximated by a polynomial of degree 13 in ξ

$$f(\xi) = \alpha \xi \sum_{k=0}^6 c_k \xi^{2k}$$

The coefficients c_k have been determined in such a way that the maximum error is minimized (error norm of Chebychev).

The variable ξ and the maximum error of approximation E_{\max} are for the :

a) Length of the arc of meridian s

$$\xi = \frac{2}{\pi} \varphi = -\frac{\varphi_0}{90} \quad |E_{\max}| < 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

b) Ellipsoidal latitude φ

$$\xi = \frac{s}{s_{90}} \quad |E_{\max}| < 5 \cdot 10^{-5}''$$

No tables are needed for these calculations. In addition to these two formulas a formula for the normal gravity γ is given which is especially advantageous when using a desk-calculator and which is also based on Chebyshev's error norm

$$\gamma = 978031,8495 (1 + 0,0052788944 \sin^2 \varphi + 0,0000234631 \sin^4 \varphi)$$

The maximum error E_{\max} is : $|E_{\max}| < 5 \cdot 10^{-3}$ mgal.

To compute one value γ with an accuracy of 0,01 mgal, two terms have to be calculated with only one tabulated value ; while three terms with three tabulated values are necessary to obtain the same accuracy with the usual formula :

$$\gamma = \gamma_a (1 + f_2 \sin^2 \varphi + f_4 \sin^2 2\varphi + f_6 \sin^2 3\varphi)$$

ACADEMIE DES SCIENCES U.R.S.S. - Références bibliographiques,
Géodésie. Sér. 52, texte russe, Moscou, 1969.

382 - t.4, 44 p.

383 - t.5, 40 p.

384 - t.6, 37 p.

385 - t.7, 39 p.

386 - t.8, 43 p.

387 - t.9, 38 p.

388 - ACADEMIE DES SCIENCES U.R.S.S. - Références bibliographiques,
Recherches Spatiales. Sér
Sér. 62, t.3, 52 p, texte russe, Moscou, 1969.

ACADEMIE DES SCIENCES U.R.S.S. - Références bibliographiques,
Géophysique. Texte russe, Moscou, 1969.

389 - t.3, 362 p.

390 - t.4, 347 p.

391 - t.5, 263 p.

392 - t.6, 140 p.

393 - t.7, 145 p.

394 - t.8, 130 p.

395 - t.9, 147 p.

396 - CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE - Bulletin signalétique 1,
Mathématiques pures et appliquées.
v.XXVIII, 80 p, Paris, 1967.

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE - Bulletin signalétique 2,
Astronomie et astrophysique, Physique du Globe. Paris, 1968.

397 - v.XXIX, n°9, p. 575-651.

398 - v.XXIX, n°10, p. 652-721.

399 - v.XXIX, n°11, p. 722-816.

- 400 - CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE - Bulletin signalétique 11,
Sciences de la Terre II, Physique du Globe, Géologie, Paléontologie.
v.XXIX, 60 p, Paris, 1968.
- 401 - CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE - Bulletin signalétique 110,
Mathématiques pures et appliquées.
v.XXX, n°4, p. 310-372, Paris, 1969.
- 402 - CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE - Bulletin signalétique 210,
Sciences de la Terre I, Minéralogie, Géochimie, Géologie extraterrestre,
Pétrographie.
v.XXX, n°4, p. 143-174, Paris, 1969.
- 403 - BJERHAMMAR A. - "On a coalescent world geodetic system, part I".
Res. Inst. Geod. Sci., 72 p, 1967.
- 404 - BJERHAMMAR A. - "On the theory of a new geoid".
Res. Inst. Geod. Sci., 45 p, 1967.
- 405 - BJERHAMMAR A. - "A new approach to satellite geodesy".
Res. Inst. Geod. Sci., 17 p, 1967.
- 406 - OSSERVATORIO GEOFISICO SPERIMENTALE - Appendice allo studio
geofisico della regione dolomitica.
Contr. n°156 bis/11, 38 p, Trieste, 1968.
- 410 - MOSETTI F., E. ACCERBONI & A. LAVENIA. - "Ricerche oceanografiche
nel mare Mediterraneo orientale (Agosto 1967)".
from : Atti dell'Istituto Veneto di S.L.A., t. CXXVII.
Osser. Geof. Sper., Contr. n°188 bis, 7 p, Trieste, 1969.
"The summarized results of the NATO cruise made with the
Bannock ship in the Mediterranean Sea are presented in this paper."

The measurements have been performed during the August 1968 along three sections :
 Section A : from Krio Cap (Crete) to Matapan Cap (Peloponnes).
 Section B : from Litinos Cap (Crete) to the African coast.
 Section C : from the eastern extremity of Crete to Turkey (coasting along the south side of Kasos, Karpathos and Rhodes Islands).

The classical measurements of salinity and temperature have been performed for every hydrological station of the platted sections...

Generally the current is flowing from Aegean Sea between Peloponnes and Crete, and in to Aegean Sea among Karpathos, Rhodes islands and Turkey coasts. The current is flowing from East to West in the Northern side of the section B and from West to East in the Southern side of the section B".

412 - ACADEMIE DES SCIENCES U.R.S.S. - Internationales Symposium erfahrungs-austausch auf dem gebiete der neigungsmessungen und Kritische betrachtung ihrer physikalischen Bedeutung".
 (20 articles, texte russe, titre allemand) 240 S, Moskau, 1969.

413 - FINNISH GEODETIC INSTITUTE, 1918 - 1968.
 Pub. Fin. Geod. Inst., n°65, Helsinki, 1969.

General report on the work made between 1918 and 1968, specially :

- a) HONKASALO T. - "Gravity measurements".
 p. 97-113.
- b) ORLANDER V.R. & T. HONKASALO. - "Computing the geoid".
 p. 115-122.

414 - VECCHIA O. - "Il Messiniano ed i moti isostatici in Italia".
 Bull. Soc. Geol. Italiana, v. LXXVII, Fasc. 1, 8 p, Roma, 1958.

"Previous authors had discovered that the greatest negative gravity anomalies of the Appennines and Sicily occur where mio-pliocene sediments of evaporitic facies (Messiniano) are present. Now it is shown that this coincidence is more complete and general than previously supposed. But, in spite of justifying the gravity anomalies with the low density of messinian sediments, as made before, it is the origin of this evaporitic series that must be explained in terms of pre-existing negative anomalies.

The A. imagines that the great Miocene sedimentation troughs, parallel to the Apennines and already characterised by negative belts, should have been raised at the end of that period by isostatic adjustments this originated shallow paralic basins where evaporitic sediments were formed".

- 415 - YOUNG D.G.G. - "The gravity anomaly map of County Donegal".
Dublin Inst., Advanced Studies, Ser. D, Geophys., Bull. n°26, 6 p,
1969.

"Previous gravity work in the Co. Donegal area of north-west Ireland is contained in three isolated traverses crossing major granite intrusions and formed an integral part of the initial regional gravity survey over the northern part of the country (Cook and Murphy, 1952).

The present surveys were conducted by the author and Dr. R.P. Riddihough during the summer months of 1967 and 1968 using a Worden gravimeter. The object was to obtain a complete gravity coverage of the county in an effort to ascertain the underground form of the several granite masses and the geophysical effect, if any, of the major dislocations, particularly the Leannan fault (Pitcher, Elwell, Tozer and Cambray, 1964). The Bouguer anomaly map together with a short description of the major features form the content of this bulletin and it is intended that the interpretation details be published separately".

- 416 - MURPHY T. - "Deep alteration of carboniferous strata in the Midleton, Co. Cork district as detected by gravity surveying".
Proc. Royal Irish Acad., v.64, Ser. B, n°17, p. 323-334, 1966.

"At several places in the Cork Syncline, in particular close to the northern Devonian-Carboniferous contact, closed negative gravity anomalies occur. These range up to 4 mgal amplitude and cover about a square kilometre. The cause suggested is decomposition of the Carboniferous Shale and solutioning of the Carboniferous Limestone to a depth of 180 m. below the surface, the cavities being filled with the insoluble residue of the limestone and shale together with other washed-in material. The age, by comparison with similar known occurrences in Ireland and England, is probably Tertiary. The surface of the ground is about 10 m. M.S.L. and it is suggested that sea level was more than 150 m. below the present level in Tertiary Times. The infilling may contain minerals of commercial value".

- 417 - MORELLI C., R. DAL CIN & E. SEMENZA. - "Contributi geofisico con appendici geologiche";
from : "Le Dolomiti", Ist. Geol. dell Univ. di Ferrara.
Osser. Geof., Contr. n°156 bis 1, p. 535-552, Trieste, 1968.

"A qualitative geological interpretation of the residual gravity anomalies which are the results of gravimetric surveys carried out in the Dolomites and surrounding areas. The interpretation is also based upon the study of anomalies with the method of models. The bundles of the observed positive and negative anomalies have a trend more or less parallel to the trends of the main structural elements of the area. In the southwestern part of the Dolomites region and northeast of Cortina, however, there are some anomalies whose trends differ considerably from those of the structural elements. The most evident concordances of gravity anomalies and structural features are those relative to the Col Visentin and Mte Cavallo anticline, the Belluno syncline, the Mte Coppolo and Mte Pelf anticline. Good correspondence exists also for the synclines of Pale di S. Martino, of Civetta, of Pelmo, of Marmarole, of Ampezzo highlands, of Tre Cime di Lavaredo and for Cima Bocche anticline. In some cases the anomalies are explained with the presence of intrusive bodies as f.i. the negative anomaly in correspondence with the Cima d'Asta granite, and the positive anomaly of the area of the Fiemme valley attributed at least in part to the basic masses of Predazzo and extending much more toward west as it would appear on the surface. The positive anomaly southeast of Bressanone (Brixen) is also attributed to basic intrusives spread below the crystalline schists. Noteworthy is also a transversal bundle of relative maxima which extends from southeast of Mte Civetta as far as the Braies area. This bundle seems to be related to a zone which is uplifted by a series of inverse faults with northsouth trend".

418 - STRANG Van HESS G.L. - "Gravity measurements on the Atlantic, NAVADO III". Geod. Inst., Tech. Univ., Paper presented at the General Assembly of I.U.G.G., Luzern, 7 p, Delft, 1967.

- Gravity map of mean free air anomalies of one degree profiles
- Comparison of the measured gravity anomalies with the theoretical anomalies computed by U.A. UOTILA (each $5^\circ \times 5^\circ$ square).

419 - KEICHI KASAHARA & ANNE E. STEVENS. - "A symposium on processes in the focal region".

Pub. Dom. Obs., v.XXXVII, n°7, p. 183-235, Ottawa, 1969.

This publication contains 6 papers presented at the Symposium held in Zurich, October 5, 1967.

420 - The Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society.
v.18, n°1, 1969.

- a) GOUGH D.L. & J.R. HEIRTZLER. - "Magnetic anomalies and tectonics of the Cayman Trough".
p. 33-50.

"A magnetic residual total-field anomaly map has been prepared for the Cayman Trough, Cayman Ridge and part of the Nicaragua Rise. Errors of navigation necessitated empirical adjustments of track positions, chosen to minimize differences at track crossings, before the contour map could be drawn. The map shows linear anomalies along the north and south bounding walls of the Cayman Trough east of longitude 82°W ; that on the north has two maxima and terminates just west of Grand Cayman. Further west a more irregular positive anomaly follows the north wall of the Trough. Some topographic features have associated magnetic anomalies but others do not, and it is clear that some are composed of non-magnetic rock. The observed magnetic anomalies and bathymetry along one ship track are used for comparison with anomalies computed for two-dimensional models. Again it is clear that both magnetic and non-magnetic rocks, juxtaposed on steeply and variously inclined planes, are required in the walls to account for the anomalies. Faults are indicated but the anomaly pattern is not consistent with normal faulting in tension. Previous seismic refraction and gravity results show a very thin crust under the floor of the Trough and suggest that it is a tensile feature. Tectonic and geophysical evidence from the Caribbean region is shown to lead to the same conclusions for the Cayman Trough as do the requirements of distortion of the Caribbean which arise if the Atlantic is assumed to have opened from an optimum fit of the continents which surround it. These conclusions are that very large strike-slip movements of the kind suggested by Hess and Maxwell have occurred in both walls of the Cayman Trough, and that the Trough has been formed by these and by simultaneous opening in tension. The linear magnetic anomalies arise from juxtapositions of magnetic and non-magnetic rocks in the walls, arising in the large strike-slip displacements. The model proposed for the formation of the Trough is considered to be consistent with all available seismic refraction, gravity, magnetic and bathymetric information, with geological evidence from the islands and with evidence of hypocentre distribution and source mechanism studies of earthquakes in the region".

- b) WONG L. & R. GORE. - "Accuracy of geoid heights from ϕ modified Stokes kernels".
p. 81-91.

"The dependence of the r.m.s. geoid height error on the degree of the first term in the zonal harmonics expansion of the kernel in Stokes's integration formula is examined. It is shown that kernels with the lower degree terms removed have some advantage over the conventional kernel when a significant error in the zeroth term of the gravity anomaly expansion is present. Numerical estimates of r.m.s. geoid height error vs integration cap size are obtained for several kernels".
